Силы Лензе-Тирринга

Рассмотрим систему частиц, обладающих массами, подобную, например, Солнечной системе. Выберем одну массу в качестве центрального тела и в ее окрестностях используем стандартную систему координат, начало которой находится в центре масс тела.

Исходя из этого формулировке, мы определим метрический тензор $g^{E}{}_{\alpha\beta}$ в системе координат, которая не вращается. Обозначим координаты этого система отсчета в виде $\{x^{\mu}{}_{E}\} \equiv (x^0 = ct, x)$ и представим метрический тензор $g^{E}{}_{\alpha\beta}$ в следующем виде:

$$g^{E}_{00} = 1 - \frac{2}{c^2} w_E + \frac{2}{c^4} w_E^2 + O(c^{-6}),$$

$$g^{E}_{0m} = -\eta_{mn} \frac{4}{c^3} w_E^n + O(c^{-5}),$$

$$g^{E}_{mn} = \eta_{mn} + \eta_{mn} \frac{2}{c^2} w_E.$$

Величины σ и σ^α есть:

$$\sigma \; = \; c^{-2}(T^{00} - \gamma_{\mu\lambda}T^{\mu\lambda}) + \mathcal{O}(c^{-4}), \qquad \sigma^\alpha = c^{-1}T^{0\alpha} + \mathcal{O}(c^{-3}).$$

или

$$\begin{aligned} w(t,\mathbf{x}) \; &= \; w_0(t,\mathbf{x}) + G\int \frac{\sigma(t,\mathbf{x}')d^3x'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} + \frac{1}{2c^2}G\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int d^3x'\sigma(t,\mathbf{x}')|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| + \mathcal{O}(c^{-3}), \\ w^\alpha(t,\mathbf{x}) \; &= \; w_0^\alpha(t,\mathbf{x}) + G\int \frac{\sigma^\alpha(t,\mathbf{x}')d^3x'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} + \mathcal{O}(c^{-2}), \end{aligned}$$

$$w_{\mathrm{E}} = U_{\mathrm{E}} + u_{\mathrm{E}}^{\mathtt{tidal}} + \mathcal{O}(c^{-3}).$$

$$U_{\mathrm{E}} = G \int \frac{\sigma(t, \mathbf{x}')d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \mathcal{O}(c^{-4})$$

$$w_E \sim \frac{GM}{r} \approx v^2.$$

$$w_{\mathrm{E}}^{\alpha} = G \int \frac{\sigma^{\alpha}(t, \mathbf{x}')d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \mathcal{O}(c^{-2}) = -\frac{GM_{\mathrm{E}}}{2r^3}[\mathbf{x} \times \mathbf{S}_{\mathrm{E}}]^{\alpha} + \mathcal{O}(r^{-4}, c^{-2}),$$

Векторный гравитационный потенциал в общем виде есть:

$$w^{\alpha} = G\int \frac{\sigma^{\alpha}(\vec{x}')d^3x'}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|} = -\frac{GM}{2r^3}\left[\vec{x}\times\vec{S}\right].$$

Здесь *M* -масса тела, создающего гравитационное поле, ***S*** – вектор удельного момента вращения на единицу массы.

В дальнейших расчетах будем также полагать, что гравитационное поле является почти статичным, или производные от гравитационного потенциала по времени, поделенного на скорость света, значительно меньше по абсолютной величине, чем пространственные производные гравитационного потенциала:

$$\left|\frac{\partial\varphi}{c\partial t}\right| << \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|$$

В этом случае мы имеем дело с достаточно медленными движениями пробных тел и медленными изменениями внутри пробных тел. Это типичная задача небесной механики.

Вспомним уравнение геодезической линии – уравнение движения пробной частицы

$$\frac{du^{\alpha}}{dl}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}=0.$$

Здесь u^{α} -касательный вектор к траектории пробной частицы:

$$u^{\alpha}=\gamma\left(1,\frac{v^{1}}{c},\frac{v^{2}}{c},\frac{v^{3}}{c}\right).$$

Получаем уравнение вида:

$$\frac{du^{\alpha}}{dl}+\Gamma_{00}^{\alpha}\gamma^{2}+\Gamma_{0i}^{\alpha}\gamma^{2}\frac{v^{i}}{c}+\Gamma_{ik}^{\alpha}\gamma^{2}\frac{v^{i}}{c}\frac{v^{k}}{c}=0.$$

Первый член этого уравнения содержит гравитационный потенциал. Величина первого слагаемого есть:

$$\Gamma_{00}^{\alpha}\gamma^{2}\sim\frac{\partial w}{c^{2}\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial w^{2}}{c^{4}\partial x^{\alpha}}\sim\frac{v^{2}}{c^{2}l}+\frac{v^{4}}{c^{4}l}.$$

Величины третьего слагаемого есть:

$$\sim\frac{v^{4}}{c^{4}}.$$

Поэтому мы должны сохранять w^2
В формуле для g_{00}.

Вычислим символы Кристоффеля.

$$\Gamma^0_{00} = 0; \quad \Gamma^i_{00} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial w}{\partial x^i}; \quad \Gamma^i_{mn} u^n u^m = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial w}{\partial x^i}\frac{v^2}{c^2}.$$

Второе слагаемое есть

$$\Gamma^i_{0k} = \frac{2}{c^3}\left(\frac{\partial w^k}{\partial x^i} - \frac{\partial w^i}{\partial x^k}\right), \quad \Gamma^i_{0k} u^0 u^k = \frac{2}{c^3}\left(\frac{\partial w^k}{\partial x^i} - \frac{\partial w^i}{\partial x^k}\right) u^0 u^k.$$

Подставляя выражение для скорости получаем

$$\Gamma^i_{0k} u^0 u^k = \frac{2}{c^3}\left(\frac{\partial w^k}{\partial x^i} - \frac{\partial w^i}{\partial x^k}\right) u^0 u^k = \frac{2}{c^4}\gamma^2\left(\frac{\partial w^k}{\partial x^i} - \frac{\partial w^i}{\partial x^k}\right) v^k.$$

В трехмерных обозначениях можно переписать эту формулу как

$$\Gamma^{i}_{0k} u^{0} u^{k} = -\frac{2}{c^{4}} \gamma^{2} \left[\vec{v} \times \mathrm{rot}\, \vec{w} \right].$$

Отметим, что вид силы напоминает силу Лоренца в воздействии магнитного поля на электрический заряд. Поэтому такое взаимодействие часто называют гравимагнитными силами. Роль заряда играет масса пробной частицы

$$\vec{\mathscr{F}} = \frac{2m}{c^{2}} \gamma^{2} \left[\vec{v} \times \mathrm{rot}\, \vec{w} \right].$$

Уравнение движения в этом случае есть

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{2m}{c}\gamma^2\left[\vec{v}\times\mathrm{rot}\,\vec{w}\right].$$

Этот член аналогичен *силе Кориолиса,* которая действует в неинерциальной системе координат на пробную частицу. Неинерциальная система координат вращается с угловой скоростью:

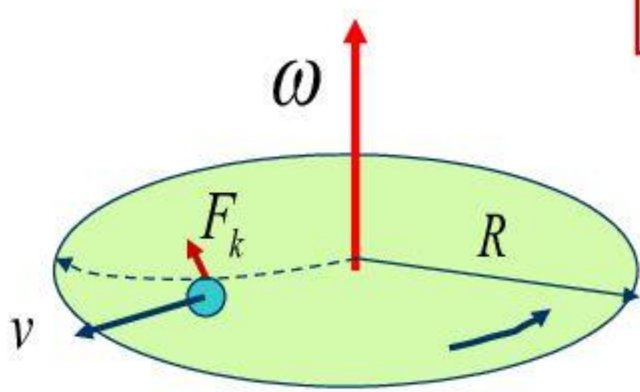
$$\vec{\omega} = \frac{1}{c^2}\gamma^2\,\mathrm{rot}\,\vec{w}.$$

Напомним, что такое сила Кориолиса и как она действует на пробную частицу.

Сила Кориолиса

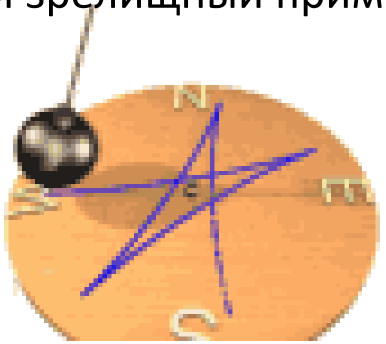
1. Диск стоит, шарик катится точно по радиусу
2. Диск вращается – траектория шарика такая, как если бы на него действовала сила $\perp$ к скорости. Это и есть сила Кориолиса. Она меняет направление скорости, но не величину.

$$\boxed{F_{kop} = -2m[\omega \cdot v'] = 2m[v' \cdot \omega]}$$

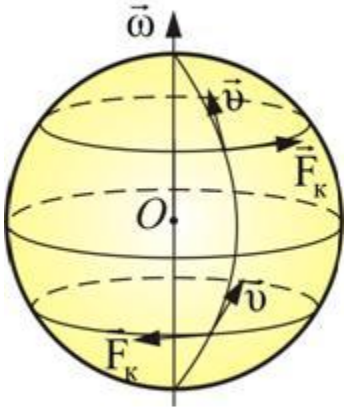


Вектор $\mathbf{F}_K$ перпендикулярен векторам скорости $\boldsymbol{v}'$ тела и угловой скорости вращения $\boldsymbol{\omega}$ системы отсчета в соответствии с правилом правого винта.

Самый зрелищный пример силы Кориолиса - маятник Фуко.



Сила Кориолиса действует на тело, движущееся вдоль меридиана в северном полушарии вправо и в южном – влево



В общей теории относительности на пробную частицу, которая находится рядом с вращающимся телом действует сила. Она аналогичны силе Кориолиса, хотя в обычных условиях гораздо слабее.

$$\vec{\mathscr{F}} = 2m\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right].$$

Вычислим явный вид этого члена в случае однородного шара, который вращается с постоянной угловой скоростью

$$\Omega$$

Удельный момент количества вращения на единицу массы в случае однородного шара, который вращается с постоянной угловой скоростью есть:

$$\vec{S} = \frac{2}{5}\Omega R_s^2 \vec{s},$$ здесь $\vec{s}$ единичный вектор в направлении оси вращения.

Тогда векторный гравитационный потенциал есть:

$$w^{\alpha} = -\frac{GM\Omega R_s^2}{5r^3}\left[\vec{r} \times \vec{s}\right].$$

Здесь $\vec{s}$ -единичный вектор в направлении оси вращения.

Систему координат выберем так, чтобы ось *Oz* совпадала с осью вращения, тогда единичный вектор в направлении оси вращения есть:

$$\vec{s} = (0, 0, 1),$$

соответственно векторное произведение радиус-вектора на единичный вектор в направлении оси вращения есть:

$$[\vec{r} \times \vec{s}] = (y, -x, 0).$$

Введем обозначение:

$$w_0 = -\frac{1}{5} G M \Omega R_s^2.$$

Теперь вектор угловой скорости вращения есть:

$$\vec{\omega} = \frac{\gamma^2}{c^2} w_0 \left\{ -\frac{3xz}{r^5}, -\frac{3yz}{r^5}, \frac{1}{r^3}\left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right) \right\}.$$

Абсолютная величина угловой скорости есть:

$$|\vec{\omega}| = \frac{\gamma^2}{c^2} w_0 \frac{1}{r^3}\left(1 + 3\cos^2\theta\right)^{1/2}.$$

Оценим величину угловой скорости вращения, которая эквивалентна силе Кориолиса:

$$|\omega| = \frac{r_g \Omega R_s^2}{10 r^3}.$$

Рассмотрим зависимость силы Лензе-Тирринга в плоскости экватора (*z=0*):

$$\vec{\omega} = \frac{\gamma^2}{c^2} w_0 \left\{ 0, 0, \frac{1}{r^3} \right\}.$$

Оценим величину угловой скорости вращения, которая эквивалентна силе Кориолиса для Солнца (вблизи полюса):

$$\omega_{\odot} \sim 10^{-12} \quad \text{сек}^{-1}.$$

Соответственно для Земли (вблизи экватора):

$$\omega_{\oplus} \sim -3 \times 10^{-15} \quad \text{сек}^{-1}.$$