ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

Физический факультет, астрономическое отделение
Кафедра астрофизики и звездной астрономии

Дипломная работа

По теме: «Скорости удаления в космологических и сферически-симметричных метриках.»

Студентка 6-го курса
Емцова Елена Дмитриевна

Научный руководитель:
Топоренский Алексей Владимирович

Допущен к защите «__» апреля 2017 г.
Зав. кафедрой
астрофизики и звездной астрономии
академик РАН, профессор
____________________ Черепащук А. М.

Москва, 2018 г.

Оглавление

Введение

При решении различных задач в космологии часто используются разные определения скоростей удаления галактик [1]. Каждое определение имеет свои особенности, преимущества и недостатки, и их следует принимать во внимание, чтобы избежать неверных трактовок, возможных при наивном понимании скорости. Примеры таких неверных трактовок собраны в статье [2]. Мы рассмотрим два определения скоростей удаления. Первое определение – это скорость как производная собственного расстояния по собственному времени (рассмотренное в [2, 3, 1]). Это наиболее распространенное и интуитивно понятное определение скорости удаления некоторого объекта от наблюдателя, показывающее, как быстро изменяется собственное расстояние между наблюдателем и источником с течением собственного времени наблюдателя:

$$v = \frac{dl}{d\tau} \tag{1}$$

Чтобы определить собственное расстояние (см. [3]), сначала нужно взять систему координат, в которой наблюдатель покоится, и разделить некоторую область пространства-времени, охватывающую наблюдателя и источник, на гиперповерхности постоянного собственного времени, или, другими словами, для каждого момента времени в сопутствующей наблюдателю системе координат найти область трёхмерного пространства. Если эта система является синхронной, то собственное время наблюдателя совпадает с координатным временем. Затем, зафиксировав определенное собственное время (выбрав гиперповерхность), найти собственное расстояние

$$l = \int_2^1 \sqrt{-g_{ij}dx^i dx^j} \tag{2}$$

где интеграл берется по прямой в соответствующем трёхмерном пространстве (по геодезической на гиперповерхности), $i, j = 1, 2, 3$. Сигнатуру метрики мы везде принимаем (+,-,-,-). На практике обычно имеют место сферически симметричные случаи - сферически симметричные метрики и движение источников вдоль радиальной координаты, которая и является пространственной прямой, поэтому про разделение на гиперповерхности не упоминают, но это само собой автоматически интуитивно подразумевается. Выражение (2) для собственного расстояния в сферически симметричном случае примет вид [3]:

$$l = \int_{\chi_1}^{\chi_2} d\chi \sqrt{|g_{\chi\chi}|} \tag{3}$$

Где χ - радиальная координата, $\chi_2 > \chi_1$. В одной из точек (1 или 2) находится наблюдатель. Мы будем во всех случаях брать неподвижного относительно системы координат наблюдателя, тогда его координата фиксирована. А другая координата - это координата источника, она может меняться с течением времени, отражая движение источника. Мы будем рассматривать только такие сферически симметричные случаи.

Второе определение скорости удаления – это скорость, полученная с помощью параллельного переноса 4-скорости удаленного объекта (вычисляемой по его трехмерной скорости относительно системы координат) из точки нахождения объекта в точку нахождения наблюдателя по некоторой кривой. Оно рассматривается например в [4]. Данное определение подразумевает использование связности, которая, вообще говоря, бывает различных типов и определяется неоднозначно. Параллельный перенос вектора 4-скорости $U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$ вдоль кривой с параметром λ определяется уравнением (а точнее системой из четырех дифференциальных уравнений) [4]:

$$\frac{dU^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} U^\beta \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0 \tag{4}$$

Начальные условия берутся равными четырех-скорости объекта в точке его нахождения. Выбор кривой в общем случае произволен. Коэффициенты связности $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ также зависят от того, какая аффинная связность выбрана на многообразии. Мы рассмотрим случаи переносов по связности Леви-Чивиты (связность, ассоциированная с метрикой, в ней ненулевая кривизна и отсутствует кручение) и связности Вайтценбока (обладающей нулевой кривизной и ненулевым кручением). Подробно про кривизну и кручение связностей описано в [5], про связность Вайтценбока и её использование в телепараллельной гравитации - [6]. Перенос будем осуществлять по двум типам кривых. Первый тип - это кривая постоянного координатного времени, соединяющая источник и наблюдателя. При переносе по такой кривой подразумевается слоение пространсива-времени (или некоторой его области) на гиперповерхности постоянного времени в той системе координат, относительно которой наблюдатель покоится, затем соединение источника и наблюдателя пространственной прямой (то есть геодезической на выбранной гиперповерхности, которая должна определяться между источником и наблюдателем однозначно), и параллельный перенос вектора 4-скорости по этой кривой. Такой перенос в метрике Фридмана рассмотрен в [4]. Второй тип - это светоподобная кривая, соединяющая источник и наблюдателя геодезической для фотона (которая тоже должна быть единственной) в 4-мерном пространстве-времени [7]. В этой работе мы рассмотрим оба определения скоростей удаления сначала в общем случае при наличии сферической симметрии, затем получим явные выражения для скоростей, используя оба определения, в трёх конкретных метриках (метрика Фридмана, стационарная сферически симметричная метрика невращающейся черной дыры и обобщенная метрика Леметра, полученная преобразованием стационарных координат последей) и обсудим особенности этих определений. При сферической симметрии задачи (сферически симметричные метрики, чисто радиальные скорости и нахождение наблюдателя и источника на одной прямой с центром координат) при осуществлении переноса по кривой первого или второго типа будет изменяться только радиальная координата, то есть $t = const, \theta = const, \phi = const$ или $r = r(t), \theta = const, \phi = const$. В случае Вселенной Фридмана, наблюдатель уже находится в центре координат, поэтому задача уже заведомо сферически симметрична. В случае черной дыры будем рассматривать только те случаи, когда источник находится вместе с наблюдателем и черной дырой на одной прямой и движется только радиально, тогда это тоже будет сферически симметричный случай, и угловые координаты в уравнениях участвовать не будут.

Определения скоростей и их свойства

Скорость удаления как производная

Получим теперь выражение для скорости через производную, предполагая сначала, что наблюдатель находится в точке 1, а источник в точке 2 ($\chi_1 = const, \chi_2 = \chi_2(\tau)$):

$$v = \frac{dl}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(\int_{\chi_1}^{\chi_2} d\chi\sqrt{|g_{\chi\chi}|}\right) = \int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{d}{d\tau}\left(\sqrt{|g_{\chi\chi}|}\right) d\chi + \sqrt{|g_{\chi\chi}|}\frac{d\chi_2}{d\tau} = v_{fl} + v_{loc} \qquad (5)$$

где $v_{fl} = \int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{d}{d\tau}\left(\sqrt{|g_{\chi\chi}|}\right) d\chi$ - скорость удаления тел, покоящихся относительно системы координат в той точке, где в некоторый момент находится источник (Хаббловский поток в космологии, его скорость удаления может превышать скорость света), а $v_{loc} = \sqrt{|g_{\chi\chi}|}\frac{d\chi_2}{d\tau}$ - пекулярная скорость источника относительно системы координат или относительно покоящихся в ней и бесконечно близких к источнику тел (относительно Хаббловского потока). Аналогично можно поместить источник в точку χ_1, а наблюдателя в более дальнюю точку $\chi_2 = const$, тогда поменяется выражение для пекулярной скорости и будет $v_{loc} = -\sqrt{|g_{\chi\chi}|}\frac{d\chi_1}{d\tau}$. Примечательно здесь то, что скорости складываются - скорость удаления источника есть сумма пекулярной скорости относительно потока и скорости удаления потока.

Можно еще поместить между наблюдателем и источником в точку χ_m некоторого промежуточного наблюдателя, который покоится относительно системы координат (потока), тогда скорость удаления источника от основного наблюдателя будет суммой скоростей удаления источника от промежуточного наблюдателя и промежуточного наблюдателя от основного наблюдателя, т. к. $\int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{d}{d\tau}\left(\sqrt{|g_{\chi\chi}|}\right) d\chi = \int_{\chi_m}^{\chi_2} \frac{d}{d\tau}\left(\sqrt{|g_{\chi\chi}|}\right) d\chi + \int_{\chi_1}^{\chi_m} \frac{d}{d\tau}\left(\sqrt{|g_{\chi\chi}|}\right) d\chi$.

Аддитивность скорости является преимуществом определения скорости удаления через производную. Однако в этом определении есть очень весомый недостаток - могут получаться сверхсветовые значения скоростей удаления, например, получается сверхсветовое разбегание галактик при z>1.46 при описании Вселенной в рамках ΛCDM модели с параметрами $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0.3, 0.7)$ и сегодняшним значением постоянной Планка $H = 70\frac{km/s}{Mpc}$ [2]. В [8] рассматривается Вселенная, имеющая уравнение состояния в общем виде, и эта проблема там также присутствует. Хоть эта скорость и не является свойством источника, а по большей части отражает расширение самой системы координат, и постулаты СТО здесь не применяются, этот факт довольно контринтуитивен. Также построить вектор 4-скорости с действительными значениями, соответствующий сверхсветовой скорости удаления, мы не сможем.

Скорость удаления, определенная через перенос

Рассмотрим определение скорости удаления через параллельный перенос по кривой, использующее связность. Мы рассмотрим два вида связностей - Леви-Чивиты и Вайтценбока. При связности Леви-Чивиты (связности, ассоциированной с метрикой) кривизна ненулевая и отсутствует кручение. В таком случае результат переноса вектора будет зависеть от кривой. Коэффициенты связности определяются через метрику:

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta}(\partial_\gamma g_{\beta\delta} + \partial_\beta g_{\gamma\delta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}) \tag{6}$$

Связность Вайтценбока обладает нулевой кривизной и ненулевым кручением. Коэффициенты связности в простейшем случае имеют вид:

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = h_A{}^{\alpha} \partial_\gamma h^A{}_\beta \tag{7}$$

где h^A_α - поле тетрад, удовлетворяющее условию:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{AB} h^A{}_\alpha h^B{}_\beta \tag{8}$$

Сначала получим общий вид уравнений переноса 4-скоростей (для любой связности) вдоль двух типов кривых, в сферически симметричном случае, подразумевающем, что угловые координаты $x^2 = \theta = const$ и $x^3 = \phi = const$ постоянны.

Перенос по кривой постоянного времени $t = const$.

В нашей работе мы для удобства везде будем считать скорость света $c = 1$. Примем $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, $x^0 = t = const$, $x^2 = \theta = const$, $x^3 = \phi = const$, тогда уравнение (4) примет вид:

$$\frac{dU^\alpha}{dx^1} = -\Gamma^{\alpha}{}_{\beta 1} U^\beta \tag{9}$$

Перенос по светоподобной кривой.

Пусть сначала в общем случае имеется некоторая кривая, такая что ее уравнение можно записать как $x^0 = x^0(x^1)$ (угловые координаты постоянны), тогда уравнение (4) можно переписать: $dU^\alpha = -\Gamma^{\alpha}{}_{\beta 0} U^\beta dx^0 - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta 1} U^\beta dx^1 = -\Gamma^{\alpha}{}_{\beta 0} \frac{dx^0}{dx^1} U^\beta dx^1 - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta 1} U^\beta dx^1$, что дает

$$\frac{dU^\alpha}{dx^1} = -\Gamma^{\alpha}{}_{\beta 0} \frac{dx^0}{dx^1} U^\beta - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta 1} U^\beta \tag{10}$$

Добавляя условие $dS = 0$, получаем:

$$\sqrt{g_{00}}dx^0 = \pm\sqrt{-g_{11}}dx^1 \tag{11}$$

И вместо $\dfrac{dx^0}{dx^1}$ подставляя $\pm\sqrt{-\frac{g_{11}}{g_{00}}}$, получаем уравнение параллельного переноса 4-скорости вдоль геодезической регистрируемого фотона:

$$\frac{dU^\alpha}{dx^1} = -(\pm\sqrt{-\frac{g_{11}}{g_{00}}}\Gamma^\alpha{}_{\beta 0} + \Gamma^\alpha{}_{\beta 1})U^\beta \tag{12}$$

Знак выбирается в зависимости от взаимного положения источника и наблюдателя: "$-$"если наблюдатель находится ближе к центру координат, чем источник (радиальная координата фотона, летящего в центр, уменьшается с течением времени), а "$+$"выбирается, если наблюдатель находится дальше от центра, чем источник.

Обсудим теперь, как соотносятся 4-скорости с трёхмерными скоростями. Пусть в некоторой точке $x_0^\alpha = (t_0, r_0, \theta_0, \phi_0)$ нашей основной системы координат (той системы координат, в которой по постановке задачи покоится наблюдатель, центр координат соответствует центру симметрии задачи, и дифференциальные уравнения переноса 4-скоростей записываются в этих координатах) имеется вектор 4-скорости. В точке нахождения источника этот вектор может быть 4-скоростью источника, в точке нахождения наблюдателя - перенесённой к наблюдателю 4-скоростью источника, а в некоторой промежуточной точке на кривой переноса - перенесенной 4-скоростью источника в эту промежуточную точку, в которую можно поместить вымышленного промежуточного наблюдателя, покоящегося относительно координат. Чтобы связать этот вектор с трехмерной физической скоростью в этой же системе (это будет либо физическая пекулярная скорость источника относительно координатной сетки или Хаббловского потока в случае Вселенной, либо скорость какой-то воображаемой точки, находящейся на кривой переноса и имеющей перенесенную в нее скорость источника), нужно сначала перейти в локально инерциальную в рассматриваемой точке и неподвижную относительно основной системы координат систему. При преобразовании координат $x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\alpha)$ к локально инерциальным должно выполняться условие в точке $x^{\alpha'}(x_0^\alpha)$: $g_{\alpha'\beta'}(x_0^{\alpha'}) = \eta_{\alpha'\beta'}$. Затем нужно найти вектор чеырех-скорости в новых координатах: $U^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}U^\alpha$, и далее найти компоненты 3-скорости по формуле из специальной теории относительности:

$$V^{i'} = \frac{U^{i'}}{U^{0'}} \tag{13}$$

Самое простое преобразование координат, приводящее метрику в точке $x_0^\alpha = (t_0, r_0, \theta_0, \phi_0)$ к метрике Минковского, имеет вид:

$$
\begin{aligned}
dt' &= \sqrt{g_{00}(t_0, r_0)}dt \\
dr' &= \sqrt{-g_{11}(t_0, r_0)}dr \\
dx^3 &= \sqrt{-g_{22}(t_0, r_0)}d\theta \\
dx^4 &= \sqrt{-g_{33}(t_0, r_0)}d\phi
\end{aligned} \tag{14}
$$

Построение таких локально инерциальных систем во множестве точек схоже с построением поля диагональных тетрад с метрикой Минковского, т.е. удовл. условию (8), а значение вектора 4-скорости в локально плоских координатах будет равно его значению в тетрадных.

Тогда преобразование для вектора 4-скорости к локально плоским (тетрадным) координатам имеет вид:

$$
\begin{aligned}
U^{0'} &= \sqrt{g_{00}(t_0, r_0)}U^0 \\
U^{1'} &= \sqrt{-g_{11}(t_0, r_0)}U^1
\end{aligned} \tag{15}
$$

Остальные компоненты 4-скорости равны нулю в силу сферической симметрии, а из компонент 3-скорости остаётся только радиальная, которая равна:

$$
V = \frac{U^{1'}}{U^{0'}} = \sqrt{-\frac{g_{11}(t_0, r_0)}{g_{00}(t_0, r_0)}}\frac{U^1}{U^0} \tag{16}
$$

Итак, резюмируем - чтобы перенести скорость, нужно: 1 - по пекулярной скорости источника v_{loc} найти 4-скорость в локально инерциальной в точке нахождения источника системе координат $U^{0'*} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v_{loc}^2}}$, $U^{1'*} = \pm v_{loc}\gamma = \pm v_{loc}\frac{1}{\sqrt{1-v_{loc}^2}}$ (знак "$+$"соответствует случаю, когда источник находится от центра дальше наблюдателя, и направление луча зрения наблюдателя совпадает с направлением оси r, а знак "$-$"наоборот, когда источник ближе - будем далее всюду принимать это во внимание); 2 - сделать преобразование 4-скорости от локально инерциальной системы координат в точке нахождения источника в основную, относительно которой наблюдатель покоится (и в которой мы будем осуществлять перенос) $U_*^\alpha = \frac{1}{\sqrt{|g_{\alpha\alpha}^*|}}U_*^{\alpha'}$ - это и есть начальные условия для решаемой системы уравнений; 3 - параллельно перенести вектор 4-скорости в точку наблюдения; 4 - преобразовать 4-скорость к локально инерциальной системе отсчета относительно наблюдателя $U^{\alpha'} = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}U^\alpha$; 5 - найти перенесенную скорость: $V = \frac{U^{1'}}{U^{0'}}$. (Значком $*$ обозначаются изначальная 4-скорость источника и метрика в точке источника, без $*$ - перенесенная 4-скорость и метрика в точке наблюдателя.)

Более удобный способ рассмотрения переноса

Можно немного по-другому подойти к определению скорости через перенос. При переносе сохраняется модуль вектора 4-скорости $U_\mu U^\mu = 1$. В диагональной метрике и при отсутствии угловых движений: $g_{00}(U^0)^2 + g_{11}(U^1)^2 = |g_{00}|(U^0)^2 - |g_{11}|(U^1)^2 = 1$, тогда вектор

4-скорости можно выразить:

$$\begin{cases} \sqrt{g_{00}}U^0 = ch(\alpha) \\ \sqrt{|g_{11}|}U^1 = sh(\alpha) \end{cases} \tag{17}$$

Таким образом, вектор 4-скорости зависит от одного параметра α, который изменяется в процессе переноса 4-скорости по кривой. Заметим, что в соответствии со сказанным выше, $\sqrt{g_{00}}U^0 = U^{0'}$ и $\sqrt{|g_{11}|}U^1 = U^{1'}$ - это 4-скорость в локально инерциальной системе отсчета в той точке, в которую мы сделали перенос, и эту систему можно построить в каждой точке кривой (при невырожденности метрики), и следовательно, перенесенная 3-скорость будет выражаться как $V = th(\alpha) < 1$ и никогда не превзойдет скорости света. Это является большим преимуществом определения скорости удаления через перенос. После того, как мы зафиксируем некоторую кривую переноса, то вдоль только одной этой кривой 4-скорость станет однозначно зависеть от координаты (так как при наличии кривизны, вектор, переносимый из одной точки в другую по разным путям, будет иметь разные значения). То есть, вдоль выбранной кривой мы параметризуем: $\alpha = \alpha(\lambda)$, $U^{0'}(\lambda) = ch(\alpha(\lambda))$, $U^{1'}(\lambda) = sh(\alpha(\lambda))$.

Пусть в некоторой точке кривой λ_* вектор 4-скорости принимал значение: $U_*^{0'}(\lambda^*) = ch(\alpha_*)$, $U_*^{1'} = sh(\alpha_*)$ (причем здесь не важно, взята ли эта 4-скорость в точке нахождения источника и прямо выражает его некоторую пекулярную скорость, или это уже перенесенная в некоторую точку 4-скорость, в обоих случаях для 4-скорости в этой точке существует 3-скорость $V_* = th\alpha_*$ (соответственно пекулярная или уже туда перенесенная) и существует соответствующий ей фактор $\gamma_* = \frac{1}{\sqrt{1-V_*^2}} = ch\alpha_*$). При переносе вектор $(U^{0'}, U^{1'})$ испытывает гиперболический поворот на угол $\Delta\alpha$, который в удобном для глаза виде можно записать:

$$\begin{pmatrix} U^{0'} \\ U^{1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\Delta\alpha) & sh(\Delta\alpha) \\ sh(\Delta\alpha) & ch(\Delta\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_*^{0'} \\ U_*^{1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\Delta\alpha) & sh(\Delta\alpha) \\ sh(\Delta\alpha) & ch(\Delta\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ch(\alpha_*) \\ sh(\alpha_*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\alpha_* + \Delta\alpha) \\ sh(\alpha_* + \Delta\alpha) \end{pmatrix} \tag{18}$$

И $V = th(\alpha) = th(\alpha_* + \Delta\alpha)$

Тогда поворот на бесконечно малый угол $\delta\alpha$ представится в виде:

$$\begin{pmatrix} U^{0'} \\ U^{1'} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} U^{0'} \\ U^{1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \delta\alpha \\ \delta\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{0'} \\ U^{1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\alpha + \delta\alpha) \\ sh(\alpha + \delta\alpha) \end{pmatrix} \tag{19}$$

Или

$$\delta \begin{pmatrix} U^{0'} \\ U^{1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta\alpha \\ \delta\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{0'} \\ U^{1'} \end{pmatrix} \tag{20}$$

Тогда

$$\begin{cases} \delta U^{0'} = U^{1'}\delta\alpha = U^{1'}\dfrac{d\alpha}{d\lambda}\delta\lambda \\ \delta U^{1'} = U^{0'}\delta\alpha = U^{0'}\dfrac{d\alpha}{d\lambda}\delta\lambda \end{cases} \tag{21}$$

И мы получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dU^{0'}}{d\lambda} = U^{1'}\dfrac{d\alpha}{d\lambda} = U^{1'}\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}\dfrac{dt}{d\lambda} + U^{1'}\dfrac{\partial\alpha}{\partial r}\dfrac{dr}{d\lambda} \\ \dfrac{dU^{1'}}{d\lambda} = U^{0'}\dfrac{d\alpha}{d\lambda} = U^{0'}\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}\dfrac{dt}{d\lambda} + U^{0'}\dfrac{\partial\alpha}{\partial r}\dfrac{dr}{d\lambda} \end{cases} \tag{22}$$

Делая обратно замену $U^{0'} = \sqrt{g_{00}}U^0$, $U^{1'} = \sqrt{|g_{11}|}U^1$, преобразуем систему:

$$\begin{cases} U^0\dfrac{d\sqrt{g_{00}}}{d\lambda} + \sqrt{g_{00}}\dfrac{dU^0}{d\lambda} = \sqrt{|g_{11}|}U^1\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}\dfrac{dt}{d\lambda} + \sqrt{|g_{11}|}U^1\dfrac{\partial\alpha}{\partial r}\dfrac{dr}{d\lambda} \\ U^1\dfrac{d\sqrt{|g_{11}|}}{d\lambda} + \sqrt{|g_{11}|}\dfrac{dU^1}{d\lambda} = \sqrt{g_{00}}U^0\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}\dfrac{dt}{d\lambda} + \sqrt{g_{00}}U^0\dfrac{\partial\alpha}{\partial r}\dfrac{dr}{d\lambda} \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dU^0}{d\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}U^0\dfrac{d\sqrt{g_{00}}}{d\lambda} + \frac{\sqrt{|g_{11}|}}{\sqrt{g_{00}}}U^1\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}\dfrac{dt}{d\lambda} + \frac{\sqrt{|g_{11}|}}{\sqrt{g_{00}}}U^1\dfrac{\partial\alpha}{\partial r}\dfrac{dr}{d\lambda} \\ \dfrac{dU^1}{d\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{|g_{11}|}}U^1\dfrac{d\sqrt{|g_{11}|}}{d\lambda} + \frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{|g_{11}|}}U^0\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}\dfrac{dt}{d\lambda} + \frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{|g_{11}|}}U^0\dfrac{\partial\alpha}{\partial r}\dfrac{dr}{d\lambda} \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dU^0}{d\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\dfrac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial t}U^0\dfrac{dt}{d\lambda} - \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\dfrac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial r}U^0\dfrac{dr}{d\lambda} + \frac{\sqrt{|g_{11}|}}{\sqrt{g_{00}}}\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}U^1\dfrac{dt}{d\lambda} + \frac{\sqrt{|g_{11}|}}{\sqrt{g_{00}}}\dfrac{\partial\alpha}{\partial r}U^1\dfrac{dr}{d\lambda} \\ \dfrac{dU^1}{d\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{|g_{11}|}}\dfrac{\partial\sqrt{|g_{11}|}}{\partial t}U^1\dfrac{dt}{d\lambda} - \frac{1}{\sqrt{|g_{11}|}}\dfrac{\partial\sqrt{|g_{11}|}}{\partial r}U^1\dfrac{dr}{d\lambda} + \frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{|g_{11}|}}\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}U^0\dfrac{dt}{d\lambda} + \frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{|g_{11}|}}\dfrac{\partial\alpha}{\partial r}U^0\dfrac{dr}{d\lambda} \end{cases} \tag{25}$$

Заметим, что при параллельном переносе по кривой полученная система уравнений и есть система (4), которая при сферической симметрии упрощается и имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dU^0}{d\lambda} = -\Gamma^0{}_{00}U^0\dfrac{dt}{d\lambda} - \Gamma^0{}_{01}U^0\dfrac{dr}{d\lambda} - \Gamma^0{}_{10}U^1\dfrac{dt}{d\lambda} - \Gamma^0{}_{11}U^1\dfrac{dr}{d\lambda} \\ \dfrac{dU^1}{d\lambda} = -\Gamma^1{}_{10}U^1\dfrac{dt}{d\lambda} - \Gamma^1{}_{11}U^1\dfrac{dr}{d\lambda} - \Gamma^1{}_{00}U^0\dfrac{dt}{d\lambda} - \Gamma^1{}_{01}U^0\dfrac{dr}{d\lambda} \end{cases} \tag{26}$$

Таким образом, приравнивая одинаковые слагаемые при $U^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda}$, получаем:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{|g_{11}|}}{\sqrt{g_{00}}}\dfrac{\partial\alpha}{\partial t} = -\Gamma^0{}_{10} \\ \frac{\sqrt{|g_{11}|}}{\sqrt{g_{00}}}\dfrac{\partial\alpha}{\partial r} = -\Gamma^0{}_{11} \\ \frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{|g_{11}|}}\dfrac{\partial\alpha}{\partial t} = -\Gamma^1{}_{00} \\ \frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{|g_{11}|}}\dfrac{\partial\alpha}{\partial r} = -\Gamma^1{}_{01} \end{cases} \tag{27}$$

Частные производные $\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial\alpha}{\partial r}$ выражаются через символы Кристоффеля, независимо считаемые в соответствии с выбранной связностью, и через метрику. Эти уравнения зависимы, при их решении можно выбрать два любых, содержащих разные частные производные. Затем учитывая $\frac{d\alpha}{d\lambda} = (\frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{dt}{d\lambda} + \frac{\partial\alpha}{\partial r}\frac{dr}{d\lambda}) = (\frac{\partial\alpha}{\partial x^0}\frac{dx^0}{d\lambda} + \frac{\partial\alpha}{\partial x^1}\frac{dx^1}{d\lambda})$ можно проинтегрировать α вдоль кривой и найти $\alpha(\lambda)$ и соответствующую скорость $V = th(\alpha(\lambda)) = th(\alpha_* + \int_{\lambda_*}^{\lambda}\frac{d\alpha}{d\lambda}d\lambda) = th(\alpha_* + \int_{\lambda_*}^{\lambda}(\frac{\partial\alpha}{\partial x^0}\frac{dx^0}{d\lambda} + \frac{\partial\alpha}{\partial x^1}\frac{dx^1}{d\lambda})d\lambda) = th(arcth(\pm v_{loc}) + \Delta\alpha)$, где "+"соответствует сонаправленному с радиальной осью лучу зрения (наблюдатель ближе к центру, чем источник), а "$-$"противоположно направленному (наблюдатель дальше). Для простоты некоторых теоретических обоснований будем расписывать только сонаправленный случай, однако уже в конкретных задачах рассмотрим оба. Видно, что в отличие от определения скорости через производную, здесь скорости не складываются. Можно заметить, что символы Кристоффеля $\Gamma^{\mu}{}_{\mu\gamma}$ (где μ повторяется) в одной и той же метрике будут одинаковы в разных связностях. Они ответственны за изменение вектора U^{μ} при переносе в следствие изменения метрики, а вектор этой же 4-скорости в тетрадных индексах $U^{\mu'}$ не изменяется. Символы Кристоффеля $\Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma}$, у которых $\mu \neq \beta$, изменяют угол α и компоненты вектора 4-скорости в тетрадных индексах, а следовательно, преобразуют трёхмерную скорость при переносе. Если все Кристоффели с $\mu \neq \beta$ в некоторой связности будут равны нулю, то трехмерная скорость при переносе не меняется, а скорость удаления покоящихся относительно координат источников (например галактик с нулевыми пекулярными скоростями относительно Хаббловского потока) будет равна нулю.

Если имеется два наблюдателя, находящиеся на одной кривой, вдоль которой производится перенос, то относительно ближнего наблюдателя скорость удаления будет равной $V_m = th(arcth(v_{loc}) + \int_{\lambda_*}^{\lambda_m}\frac{d\alpha}{d\lambda}d\lambda)$, а относительно дальнего $V_1 = th(arcth(v_{loc}) + \int_{\lambda_*}^{\lambda_m}\frac{d\alpha}{d\lambda} + \int_{\lambda_m}^{\lambda_1}\frac{d\alpha}{d\lambda}d\lambda) = th(arcth(V_m) + \int_{\lambda_m}^{\lambda_1}\frac{d\alpha}{d\lambda}d\lambda)$. То есть скорости также не складываются.

Определим теперь перенесенную пекулярную скорость источника как разность перенесенной скорости источника, имеющего некоторую v_{loc}, и перенесенной нулевой скорости (скорости потока): $V_{pec} = th(\alpha_* + \Delta\alpha) - th(0 + \Delta\alpha)) = \dfrac{th\alpha_*(1 - (th\Delta\alpha)^2)}{1 + th\alpha_* th\Delta\alpha}$. Так-как $\Delta\alpha = \Delta\alpha(\lambda)$ - угол, изменяющийся вдоль кривой переноса, то получается, что перенесенная пекулярная скорость, вообще говоря, зависит от расстояния до объекта. В таком случае дисперсия скоростей, определяемая по перенесенным пекулярным скоростям, будет зависеть от расстояния до системы тел, а следовательно, эта дисперсия не может быть чистой характеристикой внутренних физических взаимодействий внутри этой системы. Это является одним из недостатков определения скорости удаления через перенос.

Теперь мы получим более удобные уравнения для α при сферической симметрии в случаях, когда перенос производится по кривой постоянного времени и светоподобной кривой сначала при произвольной связности, а затем, исходя из полученных уравнений, рассмотрим особенности переноса по кривым обоих типов при связности Леви-Чивиты. Уравнения относительно α во многих случаях решаются гораздо проще, чем уравнения переноса 4-скоростей и позволяют легко объяснить некоторые интересные свойства. А в следующей главе мы будем решать в трёх метриках уравнения для α одновременно с уравнениями переноса 4-скоростей и получать одинаковые выражения для перенесенной скорости, что позволит убедиться в правильности подхода к решению уравнений относительно α.

Перенос по кривой постоянного координатного времени

Если перенос происходит по кривой $t = const$, то система (25) относительно $\alpha = \alpha(r)$ упрощается до:

$$\begin{cases} \dfrac{dU^0}{dr} = -\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\dfrac{d\sqrt{g_{00}}}{dr}U^0 + \frac{\sqrt{|g_{11}|}}{\sqrt{g_{00}}}\dfrac{d\alpha}{dr}U^1 \\ \dfrac{dU^1}{dr} = -\frac{1}{\sqrt{|g_{11}|}}\dfrac{d\sqrt{|g_{11}|}}{dr}U^1 + \frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{|g_{11}|}}\dfrac{d\alpha}{dr}U^0 \end{cases} \tag{28}$$

Что соответствует системе (9) , которая при сферической симметрии имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dU^0}{dr} = -\Gamma^0{}_{01}U^0 - \Gamma^0{}_{11}U^1 \\ \dfrac{dU^1}{dr} = -\Gamma^1{}_{11}U^1 - \Gamma^1{}_{01}U^0 \end{cases} \tag{29}$$

Приравнивая коэффициенты, получаем зависимые между собой уравнения относительно α:

$$\frac{\sqrt{|g_{11}|}}{\sqrt{g_{00}}}\frac{d\alpha}{dr} = -\Gamma^0{}_{11} \tag{30}$$

и

$$\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{|g_{11}|}}\frac{d\alpha}{dr} = -\Gamma^1{}_{01} \tag{31}$$

Важное свойство синхронных метрик при переносе по связности Леви-Чивиты

В синхронных метриках $g_{00} = 1$, и в нашем случае мы примем, что $-g_{11} = g(t, r)$.

Тогда символы Кристоффеля, считаемые через метрику по формуле (6), имеют вид:

$$\begin{aligned} \Gamma^0{}_{01} &= 0 \\ \Gamma^0{}_{11} &= \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial \tau} \\ \Gamma^1{}_{01} &= \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial \tau} \\ \Gamma^1{}_{11} &= \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial \rho} \end{aligned} \tag{32}$$

При подставлении символов Кристоффеля в систему (29) видно, что равенство слагаемых, не содержащих производные α, тождественно выполняется.

Затем записывая уравнение (30) $\sqrt{g}\dfrac{d\alpha}{dr} = -\Gamma^0{}_{11} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial \tau}$, либо уравнение (31) $\dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{d\alpha}{dr} = -\Gamma^1{}_{01} = -\dfrac{1}{2g}\dfrac{\partial g}{\partial \tau}$, получаем, что $\dfrac{d\alpha}{dr} = -\dfrac{1}{2\sqrt{g}}\dfrac{\partial g}{\partial \tau} = -\dfrac{\partial \sqrt{g}}{\partial \tau}$, тогда в случае наблюдения более далеких от центра источников, когда наблюдатель смотрит наружу:

$$\alpha(r_{obs}) - \alpha(r_*) = \Delta\alpha = -\int_{r_*}^{r_{obs}} \frac{d\sqrt{g}}{d\tau} dr = -\int_{r_2}^{r_1} \frac{d\sqrt{g}}{d\tau} dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\sqrt{g}}{d\tau} = v_{fl} \tag{33}$$

Из чего следует, что:

$$V = th\left(arcth(v_{loc}) + v_{fl}\right) \tag{34}$$

А в случае более близких источников, когда наблюдатель смотрит на центр:

$$\alpha(r_{obs}) - \alpha(r_*) = \Delta\alpha = -\int_{r_*}^{r_{obs}} \frac{d\sqrt{g}}{d\tau} dr = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{d\sqrt{g}}{d\tau} = -v_{fl} \tag{35}$$

Из чего следует, что (вспоминая, что для v_{loc} знак меняется тоже):

$$V = th\left(arcth(-v_{loc}) - v_{fl}\right) = -th\left(arcth(v_{loc}) + v_{fl}\right) \tag{36}$$

Мы получили, что в синхронных метриках (напр. метрика Фридмана или метрика Леметра) скорость удаления, определенная через перенос выражается через гиперболический тангенс от скорости, определенной через производную. Это важное свойство, полученное в [4] в метрике Фридмана и в следующей главе нашей работы в метрике Леметра, и дало идею об упрощенном способе рассмотрения переноса относительно угла.

Перенос по светоподобной кривой

Получим уравнения для α при переносе параллельно светоподобной кривой. Преобразуем систему (25) сначала в случае произвольной кривой, уравнение которой можно записать как $t = t(r)$. Подставляя $dt = \frac{\partial t}{\partial r} dr$ в

$$\begin{cases} dU^0 = -\frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \dfrac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial t} U^0 dt - \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \dfrac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial r} U^0 dr + \frac{\sqrt{|g_{11}|}}{\sqrt{g_{00}}} \dfrac{\partial\alpha}{\partial t} U^1 dt + \frac{\sqrt{|g_{11}|}}{\sqrt{g_{00}}} \dfrac{\partial\alpha}{\partial r} U^1 dr \\ dU^1 = -\frac{1}{\sqrt{|g_{11}|}} \dfrac{\partial\sqrt{|g_{11}|}}{\partial t} U^1 dt - \frac{1}{\sqrt{|g_{11}|}} \dfrac{\partial\sqrt{|g_{11}|}}{\partial r} U^1 dr + \frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{|g_{11}|}} \dfrac{\partial\alpha}{\partial t} U^0 dt + \frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{|g_{11}|}} \dfrac{\partial\alpha}{\partial r} U^0 dr \end{cases} \tag{37}$$

получим:

$$\begin{cases} dU^0 = -\frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \dfrac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial t} U^0 \frac{\partial t}{\partial r} dr - \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \dfrac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial r} U^0 dr + \frac{\sqrt{|g_{11}|}}{\sqrt{g_{00}}} \dfrac{\partial\alpha}{\partial t} U^1 \frac{\partial t}{\partial r} dr + \frac{\sqrt{|g_{11}|}}{\sqrt{g_{00}}} \dfrac{\partial\alpha}{\partial r} U^1 dr \\ dU^1 = -\frac{1}{\sqrt{|g_{11}|}} \dfrac{\partial\sqrt{|g_{11}|}}{\partial t} U^1 \frac{\partial t}{\partial r} dr - \frac{1}{\sqrt{|g_{11}|}} \dfrac{\partial\sqrt{|g_{11}|}}{\partial r} U^1 dr + \frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{|g_{11}|}} \dfrac{\partial\alpha}{\partial t} U^0 \frac{\partial t}{\partial r} dr + \frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{|g_{11}|}} \dfrac{\partial\alpha}{\partial r} U^0 dr \end{cases} \tag{38}$$

Так-как на кривой $t = t(r)$, то $\alpha(t, r) = \alpha(t(r), r)$, следовательно $\frac{d\alpha}{dr} = \frac{\partial\alpha}{\partial r} + \frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{dt}{dr}$, и система примет вид:

$$
\begin{cases}
dU^0 = -\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\dfrac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial t}U^0\frac{\partial t}{\partial r}dr - \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\dfrac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial r}U^0dr + \frac{\sqrt{|g_{11}|}}{\sqrt{g_{00}}}\dfrac{d\alpha}{dr}U^1dr \\
dU^1 = -\frac{1}{\sqrt{|g_{11}|}}\dfrac{\partial\sqrt{|g_{11}|}}{\partial t}U^1\frac{\partial t}{\partial r}dr - \frac{1}{\sqrt{|g_{11}|}}\dfrac{\partial\sqrt{|g_{11}|}}{\partial r}U^1dr + \frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{|g_{11}|}}\dfrac{d\alpha}{dr}U^0dr
\end{cases}
\tag{39}
$$

А теперь учтем, что на светоподобной кривой $\frac{\partial t}{\partial r} = \pm\sqrt{-\frac{g_{11}}{g_{00}}}$ в зависимости от направления распространения света, и получим:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dU^0}{dr} = -\dfrac{1}{\sqrt{g_{00}}}\dfrac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial t}U^0(\pm\sqrt{-\frac{g_{11}}{g_{00}}}) - \dfrac{1}{\sqrt{g_{00}}}\dfrac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial r}U^0 + \dfrac{\sqrt{|g_{11}|}}{\sqrt{g_{00}}}\dfrac{d\alpha}{dr}U^1 \\
\dfrac{dU^1}{dr} = -\dfrac{1}{\sqrt{|g_{11}|}}\dfrac{\partial\sqrt{|g_{11}|}}{\partial t}U^1(\pm\sqrt{-\frac{g_{11}}{g_{00}}}) - \dfrac{1}{\sqrt{|g_{11}|}}\dfrac{\partial\sqrt{|g_{11}|}}{\partial r}U^1 + \dfrac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{|g_{11}|}}\dfrac{d\alpha}{dr}U^0
\end{cases}
\tag{40}
$$

Сравнивая эту систему с (12), которая в одномерном случае имеет вид

$$
\begin{cases}
\dfrac{dU^0}{dr} = -(\pm\sqrt{-\frac{g_{11}}{g_{00}}}\Gamma^0{}_{00} + \Gamma^0{}_{01})U^0 - (\pm\sqrt{-\frac{g_{11}}{g_{00}}}\Gamma^0{}_{10} + \Gamma^0{}_{11})U^1 \\
\dfrac{dU^1}{dr} = -(\pm\sqrt{-\frac{g_{11}}{g_{00}}}\Gamma^1{}_{00} + \Gamma^1{}_{01})U^0 - (\pm\sqrt{-\frac{g_{11}}{g_{00}}}\Gamma^1{}_{10} + \Gamma^1{}_{11})U^1
\end{cases}
\tag{41}
$$

получаем:

$$
\frac{\sqrt{|g_{11}|}}{\sqrt{g_{00}}}\frac{d\alpha}{dr} = -(\pm\sqrt{-\frac{g_{11}}{g_{00}}}\Gamma^0{}_{10} + \Gamma^0{}_{11})
\tag{42}
$$

и эквивалентную ей

$$
\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{|g_{11}|}}\frac{d\alpha}{dr} = -(\pm\sqrt{-\frac{g_{11}}{g_{00}}}\Gamma^1{}_{00} + \Gamma^1{}_{01})
\tag{43}
$$

где "$-$"выбирается, если наблюдатель находится ближе к центру координат, чем источник, а "+ если наблюдатель находится дальше от центра, чем источник.

Связь с красным смещением по связности Леви-Чивиты

Теперь обсудим, что получается при переносе 4-скорости по светоподобной кривой по связности Леви-Чивиты. Универсальная формула для гравитационного красного смещения, приложимая в любой метрической теории гравитации имеет вид ([3], [7] гл. 7):

$$
1 + z = \frac{\omega_{em}}{\omega_{obs}} = \frac{(\vec{k}_{em}\cdot\vec{U}_{em})}{(\vec{k}_{obs}\cdot\vec{U}_{obs})}
\tag{44}
$$

где $\vec{U_{em}}$ и $\vec{U_{obs}}$ - векторы 4-скорости источника на момент излучения сигнала и наблюдателя на момент приема соответственно, а $\vec{k_{em}}$ и $\vec{k_{obs}}$ - волновой 4-вектор излученного и принятого сигнала соответственно. Здесь есть один важный момент - при связности Леви-Чивиты при параллельном переносе вектора вдоль кривой сохраняется угол между вектором и этой кривой, поэтому светоподобный волновой вектор сигнала при параллельном переносе вдоль кривой распространения сигнала сохранится. Проще говоря, волновой вектор сигнала при распространении ковариантно сохраняется. Так как $\vec{k_{em}} \cdot \vec{U_{em}}$ - скаляр, то можно параллельно перенести эти оба вектора из точки нахождения источника в точку наблюдения, тогда получим:

$$1 + z = \frac{\vec{k_{obs}} \cdot \vec{\bar{U}}_{em}}{\vec{k_{obs}} \cdot \vec{U_{obs}}} \tag{45}$$

где $\vec{\bar{U}}_{em}$ - перенесенный вектор 4-скорости источника к наблюдателю по светоподобной кривой. Получим теперь формулу красного смещения. В нашем случае в диагональной метрике и при покоящемся наблюдателе переход к 3-скорости осуществляется по формуле (16). Запишем: $1 + z = \dfrac{k^0 \bar{U}^0_{em} g_{00} + k^1 \bar{U}^1_{em} g_{11}}{k^0 U^0_{obs} g_{00}}$. Учитывая, что для светоподобного вектора выполняется $(k^0)^2 g_{00} + (k^1)^2 g_{11} = 0 \to \dfrac{k^0}{k^1} = \sqrt{\dfrac{-g_{11}}{g_{00}}}$, а $\vec{U}_{obs} = (\frac{1}{\sqrt{g_{00}}},\ 0,\ 0,\ 0)$, то выражая отночение компонент волновых векторов через метрику, получаем: $1 + z = \sqrt{g_{00}} \left(\bar{U}^0_{em} + \bar{U}^1_{em} \sqrt{\dfrac{-g_{11}}{g_{00}}} \right) = \sqrt{g_{00}} \bar{U}^0_{em} \left(1 + \sqrt{\dfrac{-g_{11}}{g_{00}}} \dfrac{\bar{U}^1_{em}}{\bar{U}^0_{em}} \right) = \gamma(1+V) = \dfrac{1+V}{\sqrt{1-V^2}} = \sqrt{\dfrac{1+V}{1-V}}$. Мы показали, что именно скорость удаления, определенная через перенос по светоподобной кривой по связности Леви-Чивиты, связана с красным смещением по формуле релятивистского смещения Доплера. Связь космологического красного смещения со скоростью, определенной через производую, описана в статье [9].

Из соотношения $1+z = \sqrt{\dfrac{1+V}{1-V}}$, выразим скорость и получим $V = th(ln(1+z))$. Здесь V и z - перенесенная скорость и красное смещение источника, который имел в общем случае ненулевую пекулярную скорость. Она также выражается через красное смещение: $v_{loc} = th(ln(1+z_*))$, такое красное смещение z_* увидел бы наблюдатель, покоящийся в потоке на нулевом расстоянии от источника. Для потока перенесенная скорость и красное смещение (космологическое) связаны таким же оборазом $V_0 = th(ln(1+z_0))$. То есть получается, что при переносе то светоподобной кривой $\Delta\alpha = ln(1+z_0)$. Запишем по-другому перенесенную скорость источника: $V = th(\Delta\alpha + \alpha_*) = th(ln(1 + z_0) + arcth(v_{loc})) = th(ln(1 + z_0) + ln(1 + z_*)) = th(ln[(1 + z_0)(1 + z_*)])$, откуда убеждаемся, что $1 + z = (1 + z_0)(1 + z_*)$. Так как z и z_0 - прямо наблюдаемые величины, то $V = th(ln(1 + z))$, $V_0 = th(ln(1 + z_0))$ и $v_{loc} = th(ln\dfrac{1+z}{1+z_0})$ также наблюдаемы. Сейчас мы рассмотрели случай, когда наблюдатель находится ближе к центру, чем источник. Если наблюдатель находится дальше и смотрит к центру, то V заменится на $-V$, и V_0 заменится на $-V_0$. Перенесенная пекулярная скорость $V_{pec} = th(\alpha_* + \Delta\alpha) - th(0 + \Delta\alpha)) = th(ln(1 + z_*) + \ln(1 + z_0)) - th(0 + ln(1 + z_0)))$ не будет зависеть от расстояния только там, где красное смещение потока не зависит от расстояния. В рассматриваемых нами случаях это будет происходить в нерасширяющейся Вселенной или при отсутствии гравитации у черной дыры.

Мы находили уравнения для α при переносе параллельно светоподовной кривой, и теперь выпишем уравнения для красного смещения через коэффициенты связности Леви-Чивиты:

$$\frac{\sqrt{|g_{11}|}}{\sqrt{g_{00}}}\frac{d\alpha}{dr} = \frac{\sqrt{|g_{11}|}}{\sqrt{g_{00}}}\frac{d(ln(1+z))}{dr} = -(\pm\sqrt{-\frac{g_{11}}{g_{00}}}\Gamma^{0}{}_{10} + \Gamma^{0}{}_{11}) \tag{46}$$

что эквивалентно

$$\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{|g_{11}|}}\frac{d\alpha}{dr} = \frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{|g_{11}|}}\frac{d(ln(1+z))}{dr} = -(\pm\sqrt{-\frac{g_{11}}{g_{00}}}\Gamma^{1}{}_{00} + \Gamma^{1}{}_{01}) \tag{47}$$

Далее мы будем получать решения в конкретных метриках (Фридмана, стац. ЧД и Леметра)

Рассмотрение определений скоростей в трёх сферически симметричных метриках

Определение скорости через производную

Метрика Фридмана

Однородная и изотропная Вселенная в сферических координатах $x^\mu = (t, x, \theta, \phi)$ (где x - радиальная координата, а $r = ax$ - физическое расстояние до источника) описывается метрикой Фридмана [4]:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left(dx^2 + R_0^2 S^2(x/R_0)d\theta^2 + R_0^2 S^2(x/R_0) sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{48}$$

где kR_0^{-2} - кривизна вселенной. Для закрытой, плоской и открытой модели соответственно $k = 1,\ 0,\ -1$ и $S(x) = sin(x),\ x,\ sinh(x)$.

Собственное время наблюдателя, который движется вместе с Хаббловским потоком, и соответственно, покоится в координатах Фридмана, является координатным временем. Собственное расстояние будет равно $l = r = ax$, если наблюдатель находится в центре координат, а x - это кордината источника. $|g_{11}| = a^2(t)$, тогда выражая скорости из формулы (5), получаем $v_{fl} = \int_0^x \dfrac{d}{dt}(a)\, d\chi = x\dot{a} = xaH = rH$ - скорость Хаббловского потока, а $v_{loc} = a\dot{x}$ - пекулярная скорость галактики. Принимая современное значение постоянной Хаббла $H = 67$ (км/с)/Мпк, получаем, что галактики, имеющие нулевую пекулярную скорость, удаляются от нас со скоростью $v_{fl} = rH$, превосходящей скорость света, если находятся от нас расстоянии, большем 4,5 Гпк.

Стационарная метрика черной дыры

Рассмотрим общий вид сферически симметричной метрики черной дыры. Мы ограничимся тем случаем, в котором черная дыра помещена в плоское пространство, следовательно метрика вокруг черной дыры асимптотически плоская и стремится к метрике Минковского на бесконечности. Без ограничения общности эту метрику (с сигнатурой

$(+,-,-,-)$) можно записать в виде [10]:

$$ds^2 = f(r)dt^2 - \frac{1}{f(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2sin^2\theta d\phi^2 \tag{49}$$

Для наблюдателя, покоящегося относительно системы координат, собственное время будет $d\tau = fdt$. Пусть наблюдатель находится в точке 2, которая дальше от центра, чем точка 1, в которой находится источник. Тогда собственное расстояние будет равным: $l = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{|g_{rr}|}dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{f(r)}}$. Интеграл зависит только от нижнего предела, поэтому $v = \frac{d}{d\tau}(\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{f(r)}}) = -\frac{1}{\sqrt{f(r_1)}}\frac{dr_1}{d\tau} = v_{loc}$ (Аналогично будет и для внутреннего наблюдателя, находящегося в точке 1: $v = \frac{d}{d\tau}(\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{f(r)}}) = \frac{1}{\sqrt{f(r_2)}}\frac{dr_2}{d\tau} = v_{loc}$) Система стационарна и скорость удаления источника равна его пекулярной скорости. Если пекулярная скорость равна нулю, то скорость удаления также равна нулю.

Обобщенные координаты Леметра

Сделаем переход от стационарных координат вокруг черной дыры к обобщенным координатам Леметра. Как и в случае черной дыры Шварцшильда так и в общем случае ЧД со сферически симметричной метрикой, покоящимися относительно координат Леметра являются те тела, которые свободно падают на черную дыру строго радиально, и имеют полную энергию $E = mc^2$ (т.е. покоятся относительно стационарных координат на бесконечности). Преобразование координат от стационарных (t, r, θ, ϕ) к Леметровым $(\tau, \rho, \theta, \phi)$ имеет вид [10]:

$$\begin{gathered} \tau = t + \int \frac{\sqrt{1-f}dr}{f} \\ \rho = t + \int \frac{dr}{f\sqrt{1-f}} \end{gathered} \tag{50}$$

В дальнейшем нам пригодятся выражения для частных производных:

$$\begin{gathered} \frac{\partial r}{\partial \tau} = -\sqrt{1-f} \\ \frac{\partial r}{\partial \rho} = -\frac{\partial r}{\partial \tau} = \sqrt{1-f} \end{gathered} \tag{51}$$

В новых координатах метика принимает вид:

$$ds^2 = d\tau^2 - (1-f)d\rho^2 - r^2d\theta^2 - r^2sin^2\theta d\phi^2 \tag{52}$$

где $f = f(r) = f(r(\tau, \rho))$

Примем, что наблюдатель свободно радиально падает с энергией $E = mc^2$, то есть покоится в координатах Леметра. Тогда собственное время наблюдателя τ - есть координатное время в системе Леметра. Собственное расстояние $l = \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho\sqrt{|g_{\rho\rho}|} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho\sqrt{1-f}$.

При постоянном собственном времени τ, применяя выражение для частных производной, получаем $\dfrac{dr}{d\rho} = \dfrac{\partial r}{\partial \rho} = \sqrt{1-f}$, тогда $l = \int_{r_1}^{r_2} dr = r_2 - r_1$. И тогда скорость удаления покоящихся в системе Леметра точек (свободно падающих тел с энергией $E = mc^2$): $v_{fl} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \dfrac{d}{d\tau}\left(\sqrt{1-f}\right) d\rho = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \dfrac{df}{d\tau}\dfrac{-1}{2\sqrt{1-f}} d\rho = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \dfrac{df}{d\rho}\dfrac{1}{2\sqrt{1-f}} d\rho = \int_{f(r_1)}^{f(r_2)} \dfrac{df}{2\sqrt{1-f}} = \sqrt{1-f(r_1)} - \sqrt{1-f(r_2)}$. И $v_{loc} = \sqrt{1-f(r_2)}\dfrac{d\rho_2}{d\tau}$ - пекулярная скорость источника относительно системы координат Леметра, если источник находится в дальней точке 2, либо $v_{loc} = -\sqrt{1-f(r_1)}\dfrac{d\rho_1}{d\tau}$ если источник находится в точке 1 ближе к центру.

Определение через перенос по связности Леви-Чивита

В этой главе будем получать явные выражения для скорости удаления, определенной через перенос в связности Леви-Чивиты в трех метриках: метрика Фридмана, стационарная метрика черной дыры и обобщенная метрика Леметра. Будем делать перенос двумя способами параллельно - решая уравнение относительно α аналитически и решая уравнение переноса 4-скорости на Wolfram Mathematica. Начальные условия для уравнений переноса, исходя из полученного в предыдущей главе результата, во всех случаях будем брать в зависитомости от пекулярной скорости:

$$\begin{aligned} U^{0*} &= \tfrac{1}{\sqrt{|g_{00}|}}\gamma = \tfrac{1}{\sqrt{|g_{00}|}}\tfrac{1}{\sqrt{1-v_{loc}^2}} \\ U^{1*} &= \pm\tfrac{v_{loc}}{\sqrt{|g_{11}|}}\gamma = \pm\tfrac{v_{loc}}{\sqrt{|g_{11}|}}\tfrac{1}{\sqrt{1-v_{loc}^2}} \end{aligned} \tag{53}$$

А значение перенесенной скорости в соответствии с формулой (16) будет равно $V = \frac{U^{1'}}{U^{0'}} = \sqrt{-\frac{g_{11}(t_0,r_0)}{g_{00}(t_0,r_0)}}\frac{U^1}{U^0}$. Значком "*"обозначаются начальные условия систем уравнений и параметры, относящиеся к источнику (4-скорость источника, его радиальная координата, метрическая функция и др.). Сначала рассмотрим перенос при постоянном координатном времени, а затем по светоподобной кривой. Результат переноса по кривой постоянного времени в метрике Фридмана совпадет с результатом, полученным в [4] - это позволяет убедиться в правильности решения при осуществлении переноса в других метриках. При переносе скорости по светоподобной кривой можно сравнить результат с известным красным смещением по формуле релятивистского красного смещения Доплера $1+z = \sqrt{\dfrac{1+V}{1-V}}$ и убедиться в отсутствии ошибок в решении, либо вычислить неизвестное красное смещение по этой же формуле через скорость, перенесенную по светоподобной кривой.

Перенос по кривой постоянного координатного времени

В метрике Фридмана

Вычислим символы Кристоффеля в связности Леви-Чивиты по формуле (6) в метрике Фридмана (48) и выпишем из них ненулевые:

$$
\begin{gathered}
\Gamma^0{}_{11} = a\dot{a} \\
\Gamma^0{}_{22} = a\dot{a}R_0^2 S^2(x/R_0) \\
\Gamma^0{}_{33} = a\dot{a}R_0^2 S^2(x/R_0) sin^2\theta \\
\Gamma^1{}_{01} = \Gamma^1{}_{10} = \Gamma^2{}_{02} = \Gamma^2{}_{20} = \Gamma^3{}_{03} = \Gamma^3{}_{30} = \frac{\dot{a}}{a} \\
\Gamma^1{}_{22} = -R_0 S(\tfrac{x}{R_0}) S'(\tfrac{x}{R_0}) \\
\Gamma^1{}_{33} = -R_0 S(\tfrac{x}{R_0}) S'(\tfrac{x}{R_0}) sin^2\theta \\
\Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21} = \Gamma^3{}_{13} = \Gamma^3{}_{31} = \frac{S'(\frac{x}{R_0})}{R_0 S(\frac{x}{R_0})} \\
\Gamma^2{}_{33} = -cos\theta sin\theta \\
\Gamma^3{}_{23} = \Gamma^3{}_{32} = ctg\theta
\end{gathered}
\tag{54}
$$

Рассмотрим сначала решение системы уравнений переноса для 4-скорости. Взаимное положение источника и наблюдателя всегда таково, что наблюдатель находится в центре координат, и направление луча зрения сонаправлено с осью.

Тело находящееся в Хаббловском потоке имеет скорость $v_{loc} = 0$, соответственно его 4-скорость изначально равна

$$U^* = (1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0) \tag{55}$$

Если v_{loc} отлична от нуля, то

$$U^* = (\frac{1}{\sqrt{1-v_{loc}^2}}\ ,\ \frac{1}{a^*}\frac{v_{loc}}{\sqrt{1-v_{loc}^2}}\ ,\ 0\ ,\ 0) \tag{56}$$

Перепишем систему уравнений (9), с ненулевыми Кристоффелями:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dU^0}{dx^1} = -\Gamma^0{}_{11}U^1 \\
\dfrac{dU^1}{dx^1} = -\Gamma^1{}_{01}U^0 \\
\dfrac{dU^2}{dx^1} = -\Gamma^2{}_{21}U^2 \\
\dfrac{dU^3}{dx^1} = -\Gamma^3{}_{31}U^3
\end{cases}
\tag{57}
$$

В этой системе для U^2 и U^3 получаются отдельные уравнения. Учитывая нулевые начальные условия для U^2 и U^3 для тела, находящегося в Хаббловском потоке или движущегося радиально, получаем решения двух последних уравнений системы:

$$\begin{aligned} U^2 &= 0 \\ U^3 &= 0 \end{aligned} \tag{58}$$

Теперь перепишем систему (57) для U^0 и U^1, подставляя выражения для символов Кристоффеля:

$$\begin{cases} \dfrac{dU^0}{dx^1} = -a\dot{a}U^1 \\ \dfrac{dU^1}{dx^1} = -\dfrac{\dot{a}}{a}U^0 \end{cases} \tag{59}$$

При фиксированном времени $t \quad a(t) = a^*(t) = const$, поэтому в данном случае a входит в систему как параметр. Данная система уравнений легко решается.

Вектор 4-скорости источника из Хаббловского потока, перенесенный к наблюдателю, имеет вид:

$$U = (ch[\frac{\dot{a}}{a}r]\ ,\ \frac{1}{a}sh[\frac{\dot{a}}{a}r]\ ,\ 0\ ,\ 0) = (ch[Hr]\ ,\ \frac{1}{a}sh[Hr]\ ,\ 0\ ,\ 0) \tag{60}$$

Здесь x - координатное расстояние до источника, и $r = ax$ - физическое.

Получим по формуле (16) перенесенную скорость удаления потока:

$$V = th[Hr] = th[v_{fl}] \tag{61}$$

где $v_{fl} = Hr$ - 3-скорость удаления потока, определенная через производную.

Вектор 4-скорости источника, имеющего радиальную пекулярную скорость относительно Хаббловского потока, перенесенный к наблюдателю, имеет вид:

$$\begin{aligned} U &= (ch[\tfrac{\dot{a}}{a}r + arcth(v_{loc})]\ ,\ \tfrac{1}{a}sh[\tfrac{\dot{a}}{a}r + arcth(v_{loc})]\ ,\ 0\ ,\ 0) \\ &= (ch[Hr + arcth(v_{loc})]\ ,\ \tfrac{1}{a}sh[Hr + arcth(v_{loc})]\ ,\ 0\ ,\ 0) \end{aligned} \tag{62}$$

И соответствующая трехмерная скорость получается равной

$$V = th[Hr + arcth(v_{loc})] = th[v_{fl} + arcth(v_{loc})] \tag{63}$$

что согласуется с соотношением скоростей в синхронных метриках (36), которое было выведено с помощью решения уравнений для α, и с результатом в [4].

В стационарной метрике черной дыры

В метрике (49) найдем ненулевые символы Кристоффеля:

$$
\begin{gathered}
\Gamma^0{}_{01} = \Gamma^0{}_{10} = \frac{f'}{2f} \\
\Gamma^1{}_{00} = \tfrac{1}{2} f f' \\
\Gamma^1{}_{11} = -\frac{f'}{2f} \\
\Gamma^1{}_{22} = -rf \\
\Gamma^1{}_{33} = -rf sin^2\theta \\
\Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21} = \Gamma^3{}_{13} = \Gamma^3{}_{31} = \frac{1}{r} \\
\Gamma^2{}_{33} = -cos\theta sin\theta \\
\Gamma^3{}_{23} = \Gamma^3{}_{32} = ctg\theta
\end{gathered} \tag{64}
$$

Рассмотрим перенос вектора 4-скорости от радиально движущегося источника к неподвижному наблюдателю.

Если источник относительно системы координат неподвижен, то его 4-скорость равна (начальные условия):

$$
U^* = (\frac{1}{\sqrt{f^*}} \ , \ 0 \ , \ 0 \ , \ 0) \tag{65}
$$

Если же его пекулярная скорость отлична от нуля, то в случае нахождения наблюдателя ближе к центру координат, чем источник, начальное условие для 4-скорости:

$$
U^* = (\frac{1}{\sqrt{f^*}} \frac{1}{\sqrt{1 - v_{loc}^2}} \ , \ \sqrt{f^*} \frac{v_{loc}}{\sqrt{1 - v_{loc}^2}} \ , \ 0 \ , \ 0) \tag{66}
$$

Система (9) при подстановке только ненулевых символов Кристоффеля примет вид:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dU^0}{dx^1} = -\Gamma^0{}_{01} U^0 \\
\dfrac{dU^1}{dx^1} = -\Gamma^1{}_{11} U^1 \\
\dfrac{dU^2}{dx^1} = -\Gamma^2{}_{21} U^2 \\
\dfrac{dU^3}{dx^1} = -\Gamma^3{}_{31} U^3
\end{cases} \tag{67}
$$

Получилось 4 отдельных уравнения. Учитывая начальные условия, получаем решения последних двух уравнений: $U^2 = U^3 = const = 0$.

Остается решить уравнения для U^0:

$$
\frac{dU^0}{dx^1} = -\frac{f'}{2f} U^0 \tag{68}
$$

И для U^1:

$$\frac{dU^1}{dx^1} = \frac{f'}{2f}U^1 \tag{69}$$

Учитывая, что $\dfrac{dU^\alpha}{dx^1} = \dfrac{dU^\alpha}{df}\dfrac{df}{dx^1} = \dfrac{dU^\alpha}{df}\dfrac{df}{dr} = \dfrac{dU^\alpha}{df}f'$, поделим (68) и (69) на f', и получим:

$$\begin{cases} \dfrac{dU^0}{df} = -\dfrac{1}{2f}U^0 \\ \dfrac{dU^1}{df} = \dfrac{1}{2f}U^1 \end{cases} \tag{70}$$

Решая эти уравнения, и учитывая начальные условия (4-скорость источника, мы ее в общем виде запишем как $U^* = (U^0_* \ , \ U^1_* \ , \ 0 \ , \ 0)$), и получаем перенесенную 4-скорость:

$$\begin{cases} \sqrt{f}U^0 = \sqrt{f^*}U^0_* \\ \frac{U^1}{\sqrt{f}} = \frac{U^1_*}{\sqrt{f^*}} \end{cases} \tag{71}$$

что эквивалентно

$$\begin{cases} U^{0'} = U^{0'}_* = const \\ U^{1'} = U^{1'}_* = const \end{cases} \tag{72}$$

Что означает, что полученная 3-скорость сохраняется: $V = \frac{U^{1'}}{U^{0'}} = const$, то есть $V = v_{loc}$

Такой же самый результат поучатся при решении уравнений для α, например (30) даст: $\dfrac{\sqrt{|g_{11}|}}{\sqrt{g_{00}}}\dfrac{d\alpha}{dr} = -\Gamma^0{}_{11} = 0$. Решением этого уравнения будет: $\alpha = const$, $\alpha = arcth(v_{loc})$, следовательно $V = th(arcth(v_{loc})) = v_{loc}$, то есть скорость удаления равна пекулярной скорости. Если наблюдатель находится дальше от центра, чем источник, то все вычисления аналогичны, только v_{loc} заменится на $-v_{loc}$ и получится $V = -v_{loc}$

В обобщенных координатах Леметра

Найдем в метрике (52) символы Кристоффеля по формуле для Кристоффелей в связности Леви-Чивиты (6) и выпишем ненулевые:

$$\begin{gathered}
\Gamma^0{}_{11} = -\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \tau} \\
\Gamma^0{}_{22} = r\frac{\partial r}{\partial \tau} \\
\Gamma^0{}_{33} = r\frac{\partial r}{\partial \tau}sin^2(\theta) \\
\Gamma^1{}_{01} = \Gamma^1{}_{10} = -\frac{(\partial f/\partial \tau)}{2(1-f)} \\
\Gamma^1{}_{11} = -\frac{(\partial f/\partial \rho)}{2(1-f)} \\
\Gamma^1{}_{22} = -\frac{r(\partial r/\partial \rho)}{1-f} \\
\Gamma^1{}_{33} = -\frac{r(\partial r/\partial \rho)sin^2(\theta)}{1-f} \\
\Gamma^2{}_{02} = \Gamma^2{}_{20} = \Gamma^3{}_{03} = \Gamma^3{}_{30} = \frac{(\partial r/\partial \tau)}{r} \\
\Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21} = \Gamma^3{}_{13} = \Gamma^3{}_{31} = \frac{(\partial r/\partial \rho)}{r} \\
\Gamma^2{}_{33} = -sin(\theta)cos(\theta) \\
\Gamma^3{}_{23} = \Gamma^3{}_{32} = ctg(\theta)
\end{gathered} \tag{73}$$

Запишем теперь систему (9), соответствующую переносу с постоянным координатным временем τ, совпадающим с собственным временем, с ненулевыми символами Кристоффеля:

$$\begin{cases}
\frac{dU^0}{dx^1} = -\Gamma^0{}_{11}U^1 \\
\frac{dU^1}{dx^1} = -\Gamma^1{}_{01}U^0 - \Gamma^1{}_{11}U^1 \\
\frac{dU^2}{dx^1} = -\Gamma^2{}_{21}U^2 \\
\frac{dU^3}{dx^1} = -\Gamma^3{}_{31}U^3
\end{cases} \tag{74}$$

Если источник, как и наблюдатель, покоится относительно координат Леметра (т.е. оба свободно падают с $E/mc^2 = 1$), то он будет иметь 4-скорость равную:

$$U^* = (1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0) \tag{75}$$

Если же он имеет некоторую пекулярную скорость v_{loc} относительно свободно падающих координат, то, если источник находится дальше от центра, чем наблюдатель:

$$U^* = (\frac{1}{\sqrt{1-v_{loc}^2}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{1-f^*}}\frac{v_{loc}}{\sqrt{1-v_{loc}^2}}\ ,\ 0\ ,\ 0) \tag{76}$$

Рассуждая аналогично, получаем $U^2 = U^3 = 0$. Теперь подставим значения символов Кристоффеля в первые два уравнения системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dU^0}{dx^1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial \tau} \\ \dfrac{dU^1}{dx^1} = \dfrac{(\partial f/\partial \tau)}{2(1-f)}U^0 + \dfrac{(\partial f/\partial \rho)}{2(1-f)}U^1 \end{cases} \tag{77}$$

Учитывая (51), обнаружим, что $\dfrac{\partial f}{\partial \tau} = \dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial \tau} = -\dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial \rho} = -\dfrac{\partial f}{\partial \rho}$. Также учтем, что при неизменяющейся координате τ вдоль траектории интегрирования выполняется $f(r(\tau,\rho)) = f(r(const,\rho)) = f(\rho)$, и следовательно $\dfrac{\partial f}{\partial \rho} = \dfrac{df}{d\rho}$. Тогда (77) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dU^0}{d\rho} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{df}{d\rho}U^1 \\ \dfrac{dU^1}{d\rho} = \left(\dfrac{df}{d\rho}\right)\dfrac{U^1 - U^0}{2(1-f)} \end{cases} \tag{78}$$

Учитывая $\dfrac{dU^\alpha}{d\rho} = \dfrac{dU^\alpha}{df}\dfrac{df}{d\rho}$, разделим на $\dfrac{df}{d\rho}$ и получим:

$$\begin{cases} \dfrac{dU^0}{df} = -\dfrac{1}{2}U^1 \\ \dfrac{dU^1}{df} = \dfrac{U^1 - U^0}{2(1-f)} \end{cases} \tag{79}$$

Для начальных условий с нулевой пекулярной скоростью решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} U^0 = ch[\sqrt{1-f} - \sqrt{1-f^*}] \\ U^1 = \dfrac{sh[\sqrt{1-f} - \sqrt{1-f^*}]}{\sqrt{1-f}} \end{cases} \tag{80}$$

Получим скорость удаления: $V = th[\sqrt{1-f} - \sqrt{1-f^*}] = th[v_{fl}]$
где $v_{fl} = \sqrt{1-f} - \sqrt{1-f^*}$ - скорость удаления, определенная через производную.
При ненулевой v_{loc} получится:

$$\begin{cases} U^0 = ch[\sqrt{1-f} - \sqrt{1-f^*} + arcth(v_{loc})] \\ U^1 = \dfrac{sh[\sqrt{1-f} - \sqrt{1-f^*} + arcth(v_{loc})]}{\sqrt{1-f}} \end{cases} \tag{81}$$

И соответствующая скорость удаления равна $V = th[\sqrt{1-f} - \sqrt{1-f^*} + arcth(v_{loc})] = th[v_{fl} + arcth(v_{loc})]$

Если источник находится ближе к черной дыре, чем наблюдатель, то при решении системы v_{loc} везде меняется на $-v_{loc}$, и перенесенная 4-скорость имеет вид:

$$\begin{cases} U^0 = ch[\sqrt{1-f} - \sqrt{1-f^*} - arcth(v_{loc})] \\ U^1 = \dfrac{sh[\sqrt{1-f} - \sqrt{1-f^*} - arcth(v_{loc})]}{\sqrt{1-f}} \end{cases} \tag{82}$$

$V = th[\sqrt{1-f} - \sqrt{1-f^*} - arcth(v_{loc})] = th[-v_{fl} - arcth(v_{loc})] = -th[v_{fl} + arcth(v_{loc})]$. Напомним, что $v_{fl} = \sqrt{1-f(r_1)} - \sqrt{1-f(r_2)}$, где $r_2 > r_1$, а когда мы помещаем наблюдателя в более дальнюю точку r_2 , то скорость $v_{fl} = \sqrt{1-f(r_1)} - \sqrt{1-f(r_2)} = \sqrt{1-f^*} - \sqrt{1-f}$ также меняет знак на противоположный.

Итак, в метрике Леметра мы опять получили ту же формулу соотношения скоростей удаления, что и в метрике Фридмана. А в прошлой главе мы получили эту же важную формулу, решая аналогичные уравнения относительно угла α для общего случая синхронных метрик.

Перенос по светоподобной кривой

Рассморим теперь перенос вектора 4-скорости по светоподобной кривой. Как мы уже получили, для этого нужно решить уравнение (12). Получим его решения в этих же метриках.

В метрике Фридмана

Как и в предыдущем случае запишем систему (12) с ненулевыми символами Кристоффеля, чтобы убедиться, что для 4-скоростей выполняется $U^2 = U^3 = 0$. (Такой же вывод можно сделать из сферической симметрии рассматриваемых метрик). Принимая, что на светоподобной геодезической летящего от источника к наблюдателю фотона выполняется условие $dt = -adx$, запишем:

$$\begin{cases} \dfrac{dU^0}{dx} = -\Gamma^0{}_{11}U^1 \\ \dfrac{dU^1}{dx} = a\Gamma^1{}_{10}U^1 - \Gamma^1{}_{01}U^0 \\ \dfrac{dU^2}{dx} = (a\Gamma^2{}_{20} - \Gamma^2{}_{21})U^2 \\ \dfrac{dU^3}{dx} = (a\Gamma^3{}_{30} - \Gamma^3{}_{31})U^3 \end{cases} \tag{83}$$

Принимая, что 4-скорость источника $U^* = (U^0_* \ , \ U^1_* \ , \ 0 \ , \ 0)$, перепишем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dU^0}{dx} = -a\dot{a}U^1 \\ \dfrac{dU^1}{dx} = \dot{a}U^1 - \dfrac{\dot{a}}{a}U^0 \end{cases} \tag{84}$$

В метрике Фридмана нам будет легче перейти от интегрирования по радиусу к интегртрованию по времени. Применяя это же условие $dt = -adx$, получим $\dfrac{dU^\alpha}{dt} = -\dfrac{dU^\alpha}{adx}$. Подставяя его в систему, имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{dU^0}{dt} = \dot{a}U^1 \\ \dfrac{dU^1}{dt} = -\dfrac{\dot{a}}{a}U^1 + \dfrac{\dot{a}}{a^2}U^0 \end{cases} \tag{85}$$

Т.к. $\dfrac{dU^0}{dt} = \dfrac{dU^0}{da}\dfrac{da}{dt}$, то

$$\begin{cases} \dfrac{dU^0}{da} = U^1 \\ \dfrac{dU^1}{da} = -\dfrac{1}{a}U^1 + \dfrac{1}{a^2}U^0 \end{cases} \tag{86}$$

Полученная система легко решается относительно a.

Для тела из Хаббловского потока с нулевой пекулярной скоростью решение системы дает перенесенную 4-скорость:

$$U = (\frac{a^2 + a_*^2}{2aa_*}\ ,\ \frac{1}{2a_*} - \frac{a_*}{2a^2}\ ,\ 0\ ,\ 0) = (ch[ln(\frac{a}{a_*})]\ ,\ \frac{1}{a}sh[ln(\frac{a}{a_*})]\ ,\ 0\ ,\ 0) \tag{87}$$

Затем поучаем сответствующую 3-скорость:

$$V = \frac{-a^2 + a_*^2}{a^2 + a_*^2} = th[ln(\frac{a}{a_*})] \tag{88}$$

И красное смещение:

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + V}{1 - V}} = \frac{a}{a_*} \tag{89}$$

Для источника, движущейся относительно Хаббловского потока со скоростью v_{loc} получаем:

Перенесенную 4-скорость:

$$U = (ch[ln(\frac{a}{a_*}) + arcth(v_{loc})]\ ,\ \frac{1}{a}sh[ln(\frac{a}{a_*}) + arcth(v_{loc})]\ ,\ 0\ ,\ 0) \tag{90}$$

Соответствующую 3-скорость:

$$V = th[ln(\frac{a}{a_*}) + arcth(v_{loc})] \tag{91}$$

И красное смещение:

$$1 + z = \sqrt{\frac{1+V}{1-V}} = \frac{a}{a_*}\sqrt{\frac{1+v_{loc}}{1-v_{loc}}} \tag{92}$$

Получим теперь такой же результат, решая уравнение для α (42), подставляя метрику и символы Кристоффеля получаем:

$$a(t)\frac{d\alpha}{dx} = -a(t)\dot{a(t)} \tag{93}$$

Так-как на кривой выполняется $dx = -\frac{dt}{a}$, то получаем

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\dot{a(t)}}{a(t)} = \frac{d\alpha}{da}\dot{a(t)} \tag{94}$$

Сокращая на $\dot{a(t)}$, получим: уравнение $\frac{d\alpha}{da} = \frac{1}{a}$, которое имеет решение (принимая начальное условие $\alpha^* = arcth(v_{loc})$):

$$\alpha = arcth(v_{loc}) + ln(\frac{a}{a^*}) \tag{95}$$

и следовательно

$$V = th[arcth(v_{loc}) + ln(\frac{a}{a^*})] \tag{96}$$

и

$$1 + z = \frac{a}{a_*}\sqrt{\frac{1+v_{loc}}{1-v_{loc}}} \tag{97}$$

В стационарной метрике черной дыры

Запишем систему (12) с ненулевыми символами Кристоффеля, принимая, что вдоль геодезической испущенного фотона $fdt = \pm dr$. (Здесь и далее верхний знак будет соответствовать положению, когда наблюдатель находится дальше от центра, чем источник, а нижний знак - наоборот):

$$\begin{cases} \frac{dU^0}{dr} = \mp\frac{1}{f}\Gamma^0{}_{10}U^1 - \Gamma^0{}_{01}U^0 \\ \frac{dU^1}{dr} = \mp\frac{1}{f}\Gamma^1{}_{00}U^0 - \Gamma^1{}_{11}U^1 \\ \frac{dU^2}{dr} = -\Gamma^2{}_{21}U^2 \\ \frac{dU^3}{dr} = -\Gamma^3{}_{31}U^3 \end{cases} \tag{98}$$

При начальных условиях $U_*^2 = U_*^3 = 0$ получаем $U^2 = U^3 = 0$. Перепишем систему для U^0 и U^1, подставляя символы Кристоффеля:

$$\begin{cases} \dfrac{dU^0}{dr} = \mp\dfrac{f'}{2f^2}U^1 - \dfrac{f'}{2f}U^0 \\ \dfrac{dU^1}{dr} = \mp\dfrac{1}{2}f'U^0 + \dfrac{f'}{2f}U^1 \end{cases} \tag{99}$$

Затем, учитывая $\dfrac{dU^0}{dr} = f'\dfrac{dU^0}{df}$, поделим систему на f':

$$\begin{cases} \dfrac{dU^0}{df} = \mp\dfrac{1}{2f^2}U^1 - \dfrac{1}{2f}U^0 \\ \dfrac{dU^1}{df} = \mp\dfrac{1}{2}U^0 + \dfrac{1}{2f}U^1 \end{cases} \tag{100}$$

Система легко решается относительно f.

При начальных условиях для 4-скорости $U^* = (\dfrac{1}{\sqrt{f^*}}\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0)$, соответствующих источнику с нулевой пекулярной скоростью $v_{loc} = 0$, решение для перенесенной 4-скорости получается:

$$U = (\frac{1}{\sqrt{f}}ch[ln(\sqrt{\frac{f}{f^*}})]\ ,\ \mp\sqrt{f}\ sh[ln(\sqrt{\frac{f}{f^*}})]\ ,\ 0\ ,\ 0) \tag{101}$$

Следовательно 3-скорость равна:

$$V = \mp th[ln(\sqrt{\frac{f}{f^*}})] \tag{102}$$

И красное смещение:

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 \mp V}{1 \pm V}} = \sqrt{\frac{f}{f^*}} \tag{103}$$

Этот случай ярко иллюстрирует контринтуитивную особенность данного определения скорости: получилось, что в стационарной метрике перенос 4-скорости от покоящегося источника к покоящемуся наблюдателю дает ненулевую скорость удаления, другими словами здесь гравитационное красное смещение воспринимается, как красное смещение из-за удаления источника.

Начальные условия для 4-скорости источника с ненулевой пекулярной скоростью v_{loc} имеют вид:

$$U^* = (\frac{1}{\sqrt{f^*}}\frac{1}{\sqrt{1-v_{loc}^2}} \ , \ \sqrt{f^*}\frac{\mp v_{loc}}{\sqrt{1-v_{loc}^2}} \ , \ 0 \ , \ 0) \tag{104}$$

откуда получается решение для перенесенной 4-скорости:

$$U = (\frac{1}{\sqrt{f}}ch[ln(\sqrt{\frac{f}{f^*}}) \mp arcth(v_{loc})] \ , \ \mp\sqrt{f} \ sh[ln(\sqrt{\frac{f}{f^*}}) \mp arcth(v_{loc})] \ , \ 0 \ , \ 0) \tag{105}$$

Отсюда получается 3-скорость:

$$V = \mp th[arcth(v_{loc}) + ln(\sqrt{\frac{f}{f^*}})] \tag{106}$$

И красное смещение:

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 \mp V}{1 \pm V}} = \sqrt{\frac{f}{f^*}}\sqrt{\frac{1+v_{loc}}{1-v_{loc}}} \tag{107}$$

Получим теперь такой же результат, решая уравнение для α (42), в котором мы выберем знак $+$, если источник находится ближе к центру (верхний знак), чем наблюдатель и $-$, если наоборот. Тогда, подставляя метрику и символы Кристоффеля в обоих случаях, получаем:

$$\frac{d\alpha}{dr} = \mp\frac{f'}{2f} \tag{108}$$

Учитывая $\frac{d\alpha}{dr} = \frac{d\alpha}{df}f'$, получим:

$$\frac{d\alpha}{df} = \mp\frac{1}{2f} \tag{109}$$

Что дает нам решение:

$$\alpha = \alpha^* \mp ln(\sqrt{\frac{f}{f^*}}) = arcth(\mp v_{loc}) \mp ln(\sqrt{\frac{f}{f^*}}) \tag{110}$$

и следовательно

$$V = \mp th[arcth(v_{loc}) + ln(\sqrt{\frac{f}{f^*}})] \tag{111}$$

и

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 \mp V}{1 \pm V}} = \sqrt{\frac{f}{f^*}}\sqrt{\frac{1+v_{loc}}{1-v_{loc}}} \tag{112}$$

где верхний знак соответствует нахождению источника ближе к центру, чем наблюдатель. Полученный результат для красного смещения совпадает с результатом в [3].

В обобщенной метрике Леметра

Система (12) с ненулевыми символами Кристоффеля при $d\tau = \pm\sqrt{1-f}d\rho$ (верхний знак соответствует положению, когда наблюдатель находится дальше от центра, чем источник, а нижний знак - наоборот) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dU^0}{d\rho} = -\Gamma^0{}_{11}U^1 \\ \dfrac{dU^1}{d\rho} = \mp\sqrt{1-f}\Gamma^1{}_{10}U^1 - \Gamma^1{}_{01}U^0 - \Gamma^1{}_{11}U^1 \\ \dfrac{dU^2}{d\rho} = -(\pm\sqrt{1-f}\Gamma^2{}_{20} + \Gamma^2{}_{21})U^2 \\ \dfrac{dU^3}{d\rho} = -(\pm\sqrt{1-f}\Gamma^3{}_{30} + \Gamma^3{}_{31})U^3 \end{cases} \tag{113}$$

Также видим, что из начального условия $U^2_* = U^3_* = 0$, следует $U^2 = U^3 = 0$. Перепишем систему для U^0 и U^1, подставляя символы Кристоффеля и учитывая, что $\dfrac{\partial f}{\partial\rho} = -\dfrac{\partial f}{\partial\tau}$:

$$\begin{cases} \dfrac{dU^0}{d\rho} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial\rho}U^1 \\ \dfrac{dU^1}{d\rho} = \dfrac{(\partial f/\partial\rho)}{2(1-f)}\left((1\pm\sqrt{1-f})U^1 - U^0\right) = \dfrac{(1\pm\sqrt{1-f})U^1 - U^0}{2(1-f)}\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) \end{cases} \tag{114}$$

Теперь учтем, что при интегрировании по светоподобной кривой, $\tau = \tau(\rho)$, если наблюдатель дальше от центра, то $d\tau = \sqrt{1-f}d\rho$, тогда $f(\tau,\rho) = f(\tau(\rho),\rho)$ и $\dfrac{df}{d\rho} = \dfrac{\partial f}{\partial\rho} + \dfrac{\partial f}{\partial\tau}\dfrac{\partial\tau}{\partial\rho} = \dfrac{\partial f}{\partial\rho} - \dfrac{\partial f}{\partial\rho}\dfrac{\partial\tau}{\partial\rho} = \dfrac{\partial f}{\partial\rho}(1 - \dfrac{\partial\tau}{\partial\rho}) = \dfrac{\partial f}{\partial\rho}(1-\sqrt{1-f})$, а если наблюдатель ближе к центру, то $d\tau = -\sqrt{1-f}d\rho$ и $\dfrac{df}{d\rho} = \dfrac{\partial f}{\partial\rho} + \dfrac{\partial f}{\partial\tau}\dfrac{\partial\tau}{\partial\rho} = \dfrac{\partial f}{\partial\rho} + \dfrac{\partial f}{\partial\tau}(-\sqrt{1-f}) = \dfrac{\partial f}{\partial\rho}(1+\sqrt{1-f})$, домножим систему на $(1\mp\sqrt{1-f})$:

$$\begin{cases} (1\mp\sqrt{1-f})\dfrac{dU^0}{d\rho} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{df}{d\rho}U^1 \\ (1\mp\sqrt{1-f})\dfrac{dU^1}{d\rho} = \dfrac{(1\mp\sqrt{1-f})U^1 - U^0}{2(1-f)}\left(\dfrac{df}{d\rho}\right) \end{cases} \tag{115}$$

Учитывая $\dfrac{dU^\alpha}{d\rho} = \dfrac{dU^\alpha}{df}\dfrac{df}{d\rho}$, имеем:

$$\begin{cases} (1\mp\sqrt{1-f})\dfrac{dU^0}{df} = -\dfrac{1}{2}U^1 \\ (1\mp\sqrt{1-f})\dfrac{dU^1}{df} = \dfrac{(1\mp\sqrt{1-f})U^1 - U^0}{2(1-f)} \end{cases} \tag{116}$$

Система решается относительно f. Для источника с нулевой пекулярной скоростью получится решение:

$$\begin{cases} U^0 = ch\left[ln\left(\dfrac{1\mp\sqrt{1-f}}{1\mp\sqrt{1-f^*}}\right)\right] \\ U^1 = \dfrac{1}{\sqrt{1-f}}sh\left[\mp ln\left(\dfrac{1\mp\sqrt{1-f}}{1\mp\sqrt{1-f^*}}\right)\right] \end{cases} \tag{117}$$

Перенесенная 4-скорость: $U = (ch[ln(\frac{1\mp\sqrt{1-f}}{1\mp\sqrt{1-f^*}})]\ ,\ \frac{1}{\sqrt{1-f}}sh[\mp ln(\frac{1\mp\sqrt{1-f}}{1\mp\sqrt{1-f^*}})]\ ,\ 0\ ,\ 0)$

3-скорость

$$V = \mp th\left[ln\left(\frac{1\mp\sqrt{1-f}}{1\mp\sqrt{1-f^*}}\right)\right] \tag{118}$$

Красное смещение

$$1+z = \sqrt{\frac{1\mp V}{1\pm V}} = \frac{1\mp\sqrt{1-f}}{1\mp\sqrt{1-f^*}} \tag{119}$$

При наличии пекулярной скорости:

$$\begin{cases} U^0 = ch\left[ln\left(\dfrac{1\mp\sqrt{1-f}}{1\mp\sqrt{1-f^*}}\right) + arcth(v_{loc})\right] \\ U^1 = \mp\dfrac{1}{\sqrt{1-f}}sh\left[ln\left(\dfrac{1\mp\sqrt{1-f}}{1\mp\sqrt{1-f^*}}\right) + arcth(v_{loc})\right] \end{cases} \tag{120}$$

Перенесенная 4-скорость:
$U = (ch[ln(\frac{1\mp\sqrt{1-f}}{1\mp\sqrt{1-f^*}}) + arcth(v_{loc})]\ ,\ \mp\frac{1}{\sqrt{1-f}}sh[ln(\frac{1\mp\sqrt{1-f}}{1\mp\sqrt{1-f^*}}) + arcth(v_{loc})]\ ,\ 0\ ,\ 0)$

3-скорость

$$V = \mp th\left[ln\left(\frac{1\mp\sqrt{1-f}}{1\mp\sqrt{1-f^*}}\right) + arcth(v_{loc})\right] \tag{121}$$

Красное смещение

$$1+z = \sqrt{\frac{1\mp V}{1\pm V}} = \frac{1\mp\sqrt{1-f}}{1\mp\sqrt{1-f^*}}\sqrt{\frac{1+v_{loc}}{1-v_{loc}}} \tag{122}$$

Получим теперь такой же результат, решая уравнение для α (42). Подставляя метрику и символы Кристоффеля получаем:

$$\sqrt{1-f}\frac{d\alpha}{d\rho} = -\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial\rho} \tag{123}$$

Если наблюдатель дальше от центра, чем источник, то $d\tau = \sqrt{1-f}d\rho$, и $\frac{df}{d\rho} = \frac{\partial f}{\partial\rho} + \frac{\partial f}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\rho} = \frac{\partial f}{\partial\rho} + \frac{\partial f}{\partial\tau}(\sqrt{1-f}) = \frac{\partial f}{\partial\rho}(1-\sqrt{1-f})$. Заменяя в уравнении частную производную на полную, получим:

$$(1-\sqrt{1-f})\sqrt{1-f}\frac{d\alpha}{d\rho} = -\frac{1}{2}\frac{df}{d\rho} \tag{124}$$

Учитывая что $\frac{d\alpha}{d\rho} = \frac{d\alpha}{df}\frac{df}{d\rho}$ и деля на $\frac{df}{d\rho}$, получаем $(1-\sqrt{1-f})\sqrt{1-f}\frac{d\alpha}{df} = -\frac{1}{2}$, или $d\alpha = -\frac{df}{2\sqrt{1-f}(1-\sqrt{1-f})} = \frac{d(\sqrt{1-f})}{(1-\sqrt{1-f})} = \frac{d(\sqrt{1-f})}{(1-\sqrt{1-f})} = -d(ln[1-\sqrt{1-f}])$

Что дает нам решение:

$$\alpha = \alpha^* - ln(\frac{1-\sqrt{1-f}}{1-\sqrt{1-f^*}}) = -arcth(v_{loc}) - ln(\frac{1-\sqrt{1-f}}{1-\sqrt{1-f^*}}) \tag{125}$$

и следовательно

$$V = -th[arcth(v_{loc}) + ln(\frac{1-\sqrt{1-f}}{1-\sqrt{1-f^*}})] \tag{126}$$

и

$$1+z = \sqrt{\frac{1-V}{1+V}} = \frac{1-\sqrt{1-f}}{1-\sqrt{1-f^*}}\sqrt{\frac{1+v_{loc}}{1-v_{loc}}} \tag{127}$$

Если наблюдатель ближе к центру, то $d\tau = -\sqrt{1-f}d\rho$, и $\frac{df}{d\rho} = \frac{\partial f}{\partial\rho} + \frac{\partial f}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\rho} = \frac{\partial f}{\partial\rho} + \frac{\partial f}{\partial\tau}(-\sqrt{1-f}) = \frac{\partial f}{\partial\rho}(1+\sqrt{1-f})$, тогда получится $(1+\sqrt{1-f})\sqrt{1-f}\frac{d\alpha}{d\rho} = -\frac{1}{2}\frac{df}{d\rho}$, разделяя на $\frac{df}{d\rho}$, получаем $(1+\sqrt{1-f})\sqrt{1-f}\frac{d\alpha}{df} = -\frac{1}{2}$. Далее, разделяя переменные, получаем $d\alpha = -\frac{1}{2}\frac{df}{(1+\sqrt{1-f})\sqrt{1-f}} = \frac{d\sqrt{1-f}}{1+\sqrt{1-f}} = d(ln(1+\sqrt{1-f}))$

И

$$\alpha = arcth(v_{loc}) + ln(\frac{1+\sqrt{1-f}}{1+\sqrt{1-f^*}}) \tag{128}$$

и следовательно

$$V = th[arcth(v_{loc}) + ln(\frac{1+\sqrt{1-f}}{1+\sqrt{1-f^*}})] \tag{129}$$

и

$$1 + z = \sqrt{\frac{1+V}{1-V}} = \frac{1+\sqrt{1-f}}{1+\sqrt{1-f^*}}\sqrt{\frac{1+v_{loc}}{1-v_{loc}}} \tag{130}$$

Этот результат для красного смещения также совпадает с результатом, полученным в [3]

Определение через перенос по связности Вайтценбока в диагональных тетрадах

Мы ограничимся рассмотрением случаев только с диагональными тетрадами, потому что, во-первых, они обычно наиболее удобны и чаще всего используются, а во-вторых, у нас нет цели подробно исследовать перенос в случае связности Вайтценбока, но нам просто интересно посмотреть, что может получиться, если брать другой тип связности в принципе и интерпретировать полученный для скорости удаления результат.

Напомним, что в связности Вайтценбока символы Кристоффеля имеют вид (7): $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = h_A{}^{\alpha}\partial_{\gamma}h^A{}_{\beta}$, где $\alpha, A = 0, 1, 2, 3$.

Если мы работаем в диагональной метрике и берем диагональную тетраду, определяемую как корень из метрики, то для ненулевых диагональных компонент прямой и обратной тетрады будет справедливо соотношение:

$$h_{\alpha}{}^{\alpha} = \frac{1}{h^{\alpha}{}_{\alpha}} \tag{131}$$

Тогда коэффициенты связности будут ненулевыми только при $\alpha = \beta$ и примут вид:

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\gamma} = h_{\alpha}{}^{\alpha}\partial_{\gamma}h^{\alpha}{}_{\alpha} = \frac{1}{h^{\alpha}{}_{\alpha}}\partial_{\gamma}h^{\alpha}{}_{\alpha} \tag{132}$$

где $\alpha = 0, 1, 2, 3$ (нет суммирования по α).

Система уравнений переноса 4-скорости (4) примет вид:

$$-\frac{dU^{\alpha}}{d\lambda} = \frac{1}{h^{\alpha}{}_{\alpha}}\partial_{\gamma}h^{\alpha}{}_{\alpha}U^{\alpha}\frac{dx^{\gamma}}{d\lambda} = \partial_{\gamma}(ln(h^{\alpha}{}_{\alpha}))\frac{dx^{\gamma}}{d\lambda}U^{\alpha} = \frac{d(ln(h^{\alpha}{}_{\alpha}))}{d\lambda}U^{\alpha} \tag{133}$$

Видно, что получилось 4 отдельных уравнения, решения которых имеет вид:

$$\frac{U^{\alpha}}{U^{\alpha}_{*}} = \frac{h^{*\alpha}{}_{\alpha}}{h^{\alpha}{}_{\alpha}} = \sqrt{\frac{g^*_{\alpha\alpha}}{g_{\alpha\alpha}}} \tag{134}$$

где значком $*$ обозначается 4-скорость источника до переноса, и соответствующие его положению тетрада и метрика, а без значка - перенесенная к наблюдателю 4-скорость, тетрада и метрика в точке наблюдения.

Видно, что тетрадные (локально Минковские) компоненты 4-скорости $U^{\alpha'} = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}U^{\alpha}$ при переносе не изменяются, а следовательно и 3-скорость при переносе не изменяется. То есть не важно, в каких точках находятся источник и наблюдатель, скорость удаления будет всегда равна v_{loc}. Получается, что в расширяющейся Вселенной скорость удаления галактик, покоящихся относительно Хаббловского потока, будет равна нулю, или можно более общо сказать: скорость удаления источника, покоящегося в расширяющейся или сужающейся системе координат равна нулю. Получается, что скорость удаления, определенная через перенос по связности Вайтценбока (в диагональной тетраде), не даёт никакой информации о расширении самих координат, и тогда, возможно, встаёт вопрос о том, стоит ли вообще понимать эту перенесенную по связности Вайтценбока скорость, как скорость удаления.

Теперь убедимся, что упрощенный способ решения дифференциальных уравнений переноса 4-скорости через угол α также дает верный результат. Рассмотрим сразу вместе все три метрики и соответствующие им диагональные тетрады, определяемые как корень метрики.

В метрике Фридмана (48) диагональная тетрада имеет вид:

$$h^A{}_\beta = diag\Big(1\ ,\ a(t)\ ,\ a(t)R_0S(x/R_0)\ ,\ a(t)R_0S(x/R_0)sin\theta\Big) \tag{135}$$

$$h_A{}^\alpha = diag\left(1\ ,\ \frac{1}{a(t)}\ ,\ \frac{1}{a(t)R_0S(x/R_0)}\ ,\ \frac{1}{a(t)R_0S(x/R_0)sin\theta}\right) \tag{136}$$

А ненулевые символы Кристоффеля, полученные по формуле (7) получаются:

$$\begin{gathered}
\Gamma^1{}_{10} = \frac{\dot a(t)}{a(t)}\\
\Gamma^2{}_{20} = \frac{\dot a(t)}{a(t)}\\
\Gamma^3{}_{30} = \frac{\dot a(t)}{a(t)}\\
\Gamma^2{}_{21} = \frac{S'(x/R_0)}{R_0S(x/R_0)}\\
\Gamma^3{}_{31} = \frac{S'(x/R_0)}{R_0S(x/R_0)}\\
\Gamma^3{}_{32} = \operatorname{ctg}\theta
\end{gathered} \tag{137}$$

В стационарной метрике черной дыры (49) искомая тетрада:

$$h^A{}_\beta = diag\left(\sqrt{f(r)}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{f(r)}}\ ,\ r\ ,\ rsin\theta\right) \tag{138}$$

$$h_A{}^\alpha = diag\left(\frac{1}{\sqrt{f(r)}}\ ,\ \sqrt{f(r)}\ ,\ \frac{1}{r}\ ,\ \frac{1}{rsin\theta}\right) \tag{139}$$

И ненулевые символы Кристоффеля:

$$\begin{aligned}\Gamma^0{}_{01} &= \frac{f'}{2f} \\ \Gamma^1{}_{11} &= -\frac{f'}{2f} \\ \Gamma^2{}_{21} &= \frac{1}{r} \\ \Gamma^3{}_{31} &= \frac{1}{r} \\ \Gamma^3{}_{32} &= \operatorname{ctg}\theta\end{aligned} \tag{140}$$

В обобщенной метрике Леметра (52) по тому же принципу определяем тетраду:

$$h^A{}_\beta = diag\left(1\ ,\ \sqrt{1-f}\ ,\ r\ ,\ rsin\theta\right) \tag{141}$$

$$h_A{}^\alpha = diag\left(1\ ,\ \frac{1}{\sqrt{1-f}}\ ,\ \frac{1}{r}\ ,\ \frac{1}{rsin\theta}\right) \tag{142}$$

И находим ненулевые символы Кристоффеля:

$$\begin{aligned}\Gamma^1{}_{10} &= -\frac{\partial f/\partial\tau}{2(1-f)} = \frac{\partial f/\partial\rho}{2(1-f)} \\ \Gamma^1{}_{11} &= -\frac{\partial f/\partial\rho}{2(1-f)} = \frac{\partial f/\partial\tau}{2(1-f)} \\ \Gamma^2{}_{20} &= \frac{\partial r/\partial\tau}{r} = -\frac{\partial r/\partial\rho}{r} \\ \Gamma^2{}_{21} &= \frac{\partial r/\partial\rho}{r} \\ \Gamma^3{}_{30} &= \frac{\partial r/\partial\tau}{r} = -\frac{\partial r/\partial\rho}{r} \\ \Gamma^3{}_{31} &= \frac{\partial r/\partial\rho}{r} \\ \Gamma^3{}_{32} &= \operatorname{ctg}\theta\end{aligned} \tag{143}$$

Теперь посмотрим на уравнения для частных производных α (27) и заметим, что во всех трёх случаях отвечающие за изменения угла α символы Кристоффеля $\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}$, у которых $\mu \neq \beta$ равны нулю, из чего сразу следует, что 3-скорость при переносе 4-скорости не изменяется и всегда равна v_{loc}. Таким образом, в этом случае, как и во всех остальных случаях мы удостоверились, что описание переноса через α дает верный результат.

Заключение

Были рассмотрены два определения скоростей удаления - определение через производную собственного расстояния по собственному времени и определение через параллельный перенос соответствующей 4-скорости, и описаны некоторые их особенности, которые можно воспринимать как преимущества или недостатки этих определений.

Скорость, определенная через производную - аддитивная величина: 1 - скорость удаления источника от наблюдателя есть сумма скорости удаления потока от наблюдателя и пекулярной скорости источника; 2 - скорость удаления источника от дальнего наблюдателя есть сумма скорости удаления источника от ближнего наблюдателя и скорости удаления ближнего наблюдателя от дальнего. Аддитивность можно считать преимуществом этого определения.

Однако, при этом определении скорости удаления могут получаться сверхсветовые значения, что указывает на нефизичность такой скорости, и это можно считать недостатком данного определения.

Определение скорости удаления через параллельный перенос 4-скорости имеет свои особенности. Основным преимуществом данного определения является то, что значения 4-скоростей всегда меньше скорости света (в любой связности), и ее можно представить через гиперболический тангенс некоторого "угла". Недостатком этого определения является то, что если вектор 4-скорости как-то преобразуется при параллельном переносе, то: 1 - скорости удаления (которые были аддитивны в определении через производную) уже не аддитивны, происходит сложение "углов"вместо сложения самих скоростей; 2 - при определении перенесенной пекулярной скорости как разности скорости удаления источника с ненулевой пекулярной скоростью и скорости удаления потока, эта перенесенная пекулярная скорость зависит от расстояния от источника до наблюдателя. 3 - Результат переноса по некоторой кривой зависит от выбора связности, которая никак не сказывается на физически наблюдаемых явлениях и зависит только от математического описания, и это мешает рассматривать данное определение скорости как "более физическое". После того, как мы выберем определенную связность, результат переноса может зависеть от кривой, параллельно которой осуществляется перенос, и от построенной нами тетрады.

Теперь резюмируем результаты, полученные в работе в рассмотренных связностях.

В связности Леви-Чивиты скорость, определенная через перенос по светоподобной кривой связана с красным смещением через формулу релятивистского красного смещения

Доплера. При наличии гравитации в случае стационарной метрики и покоящихся источника и наблюдателя получаются ненулевая скорость удаления (и красное смещение), что является контринтуитивным с точки зрения понимания скорости. Перенос по кривой постоянного координатного времени требует возможности разделения пространства-времени на поверхности постоянного координатного времени и определения геодезических на этих гиперповерхностях. В центрально симметричных синхронных метриках при переносе радиально направленных скоростей выполняется важное свойство - скорость удаления источника, имеющего нулевую пекулярную скорость, определенная через перенос, есть гиперболический тангенс от скорости этого источника, определенной через производную. Это свойство доказано в работе. Для доказательства этого свойства был найден способ решения системы уравнений переноса 4-скорости относительно гиперболического угла поворота, через который эти 4-скорости (а следовательно, и трехмерная перенесенная скорость) выражаются. Этот способ значительно упрощает нахождение решения. Также показано, что красное смещение, которое находится по скорости, определенной через перенос по светоподобной кривой, также можно легко посчитать через решение системы переноса 4-скорости, вводя угол.

В связности Вайтценбока из-за нулевой кривизны результат переноса не зависит от выбора кривой, соединяющей две точки, однако он зависит от выбора тетрады. В диагональной тетраде и диагональной метрике 4-скорость при переносе не изменяется, и скорость удаления всегда оказывается равной пекулярной скорости источника. Тут также присутствует контринтуитивность - если имеется изменяющаяся во времени система координат, например расширяющаяся вселенная, то при таком определении скорость удаления никак не зависит от скорости изменения самой системы координат, иначе говоря, скорость удаления галактик никак не зависит от скорости расширения вселенной и равна нулю, если галактика не имеет пекулярной скорости относительно потока. Таким образом, эта скорость не даёт никакой информации о расширении самих координат, и возможно, этот факт порождает вопрос о том, стоит ли вообще понимать скорость, определенную через перенос по связности Вайтценбока, как скорость удаления.

Также показано, что результат нахождения скорости удаления через непосредственное аналитическое решение уравнений относительно угла, сходится с результатом, полученным через решение уравнений переноса 4-скорости с помощью программы Wolfram Mathematica, при всех рассмотренных связностях, метриках и типах кривых.

Литература

[1] A. V. Toporensky and S. B. Popov. Cosmological redshift, recession velocities and acceleration measures in FRW cosmologies. Astron. Astrophys. Trans., 29:65–88, 2015.

[2] Tamara M. Davis and Charles H. Lineweaver. Expanding confusion: common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the universe. Proc. Astron. Soc. Austral., 2003. [Publ. Astron. Soc. Austral.21,97(2004)].

[3] A. Toporensky, O. Zaslavskii, and S. Popov. Unified approach to redshift in cosmological/black hole spacetimes and synchronous frame. Eur. J. Phys., 39(1):015601, 2018.

[4] Michal Chodorowski. The kinematic component of the cosmological redshift. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 413:585, 2011.

[5] Lluis Bel. Connecting connections. 2008.

[6] Ruben Aldrovandi and José Geraldo Pereira. Teleparallel Gravity, volume 173. Springer, Dordrecht, 2013.

[7] J. L. Synge, editor. Relativity: The General theory. 1960.

[8] A. V. Toporensky and S. B. Popov. The Hubble flow: an observer's perspective. Phys. Usp., 57(7):708–713, 2014. [Usp. Fiz. Nauk184,no.7,767(2014)].

[9] Tamara M. Davis, Charles H. Lineweaver, and John K. Webb. Solutions to the chained galaxy problem and the observation of receding blue-shifted objects. Am. J. Phys., 71:358–364, 2003.

[10] A. Toporensky and O. Zaslavskii. Redshift of a photon emitted along the black hole horizon. Eur. Phys. J., C77(3):179, 2017.