

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

Физический факультет, астрономическое отделение  
Кафедра астрофизики и звездной астрономии

Дипломная работа

По теме: «Приливной заряд и поправки к нему  
в астрофизике чёрных дыр.»

Студент 6-го курса  
Прокопов Вячеслав Алексеевич

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н. Алексеев Станислав Олегович

Допущен к защите «\_\_\_» апреля 2017 г.  
Зав. кафедрой  
астрофизики и звездной астрономии  
академик РАН, профессор  
\_\_\_\_\_ Черепашук А. М.

Москва, 2018 г.

# Оглавление

Введение	3
Особенности модели	4
Тень и гравитационное линзирование	5
Последняя устойчивая орбита	11
Выводы	13
Литература	16

# Введение

Общая теория относительности (ОТО) за последние 100 лет множество раз была подтверждена и лабораторными экспериментами, и астрономическими наблюдениями [1]. Однако, нерешённые проблемы с тёмной материей и тёмной энергией, в качестве одной из стратегий, диктуют необходимость модификации ОТО [2, 3]. Примерами такого подхода могут служить  $f(R)$  гравитация, скалярно-тензорные модели, включая модели Хорндески<sup>1</sup> [5, 6, 7].

В соответствии с теоремой Биркгоффа наиболее общим видом сферически-симметричного, асимптотически плоского статического пространства-времени является метрика Шварцшильда с добавлением в нее дополнительных параметров, которая в Планковской системе единиц ( $G = c = \hbar = 1$ ) имеет вид [8]:

$$ds^2 = \Delta(r)dt^2 - \frac{dr^2}{\Delta(r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1)$$

Любая расширенная теория гравитации в пределе должна давать метрику Шварцшильда, чтобы соответствовать наблюдениям в солнечной системе (Ньютоновский предел). Метрическая функция этой метрики (1) имеет вид:

$$\Delta(r) = 1 - \frac{2M}{r} \quad (2)$$

Для сферически-симметричных решений общего вида из моделей расширенной гравитации метрику Шварцшильда можно, также, трактовать как воспроизводящую первые члены разложения теории на бесконечности в ряд Тейлора. В качестве следующего шага метрику Рейснера-Нордстрёма (РН) можно интерпретировать как разложение вплоть до членов, пропорциональных  $r^{-2}$ :

$$\Delta(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \quad (3)$$

Далее, расширяя допустимое пространство возможных значений заряда, метрику РН можно использовать для описания влияния гравитационных полей из дополнительных измерений из модели Ранда-Сандрум [9]. При этом вместо электрического заряда будет использоваться приливной заряд (tidal charge). Параметр  $q = Q^2/M^2$  для приливного заряда может иметь любой знак, в отличие от электрического заряда, для которого он всегда «+».

---

<sup>1</sup>с учетом ограничений от GW170817 [4]

Тень чёрной дыры формируется за счёт фотонов, захваченных горизонтом событий. Незахваченные фотоны формируют фон, на котором будет выделяться тёмное пятно, которое и называют тенью ЧД. Для вычисления размера тени необходимо решать задачу рассеяния света на ЧД. Рассмотрение метрики РН в ее разных представлениях для объяснения теней от черных дыр в настоящее время активно развивается [10, 11]. При этом, данные по сверхмассивной чёрной дыре в центре нашей галактики (Sgr A\*) [12, 13, 14] параметризованы с помощью именно метрики РН.

Логично, что следующим шагом следует рассмотреть физические эффекты, могущие возникнуть из добавления в рассмотрение членов следующего порядка, пропорциональных  $r^{-3}$ . Разумно рассмотреть такую метрику как модельно-независимый анзац, впоследствии наложив ограничения на её параметры, исходя из эмпирических данных и, возможно, связав с конкретной моделью. В [12, 13, 14, 15] предложено использовать наблюдательные данные гравитационного линзирования и размеров тени ЧД Sgr A\* для проверки различных теорий гравитации, так как проекты изучения тени ЧД Sgr A\* уже запущены [16, 17] и работают. Ключевой идеей такого исследования состоит в том, что для различных моделей гравитации форма и размер тени также будут различны. Далее, важным параметром будет радиус последней устойчивой орбиты (ПУО), определяющий масштабы орбитального движения. Ведь исходя из радиуса ПУО, вычисляется внутренний радиус аккреционного диска [18, 19], который, в свою очередь, может быть получен из наблюдательных данных.

Необходимо сразу отметить, что вращение ЧД в настоящей работе не учитывается. Такое приближение в качестве простейшей модели мы считаем допустимым по следующим причинам.

1. В разложении метрики Керра-Ньюмена вдали от ЧД угловой момент даёт первый вклад в слагаемое порядка  $r^{-3}$ . То есть, эффект от третьей поправки будет суммироваться (или взаимно поглощаться) с эффектами вращения. Поэтому важно рассмотреть невращающийся случай, чтобы, в дальнейшей работе, корректно учесть и вращение, и общий вид поправки третьего порядка.
2. Необходимо уже на уровне простейшей модели выделить такие наборы параметров, в которых учет третьей поправки порождает уникальные конфигурации.
3. Предложенное рассмотрение даст корректный результат в случае слабого вращения ЧД.

# Особенности модели

Разложение метрической функции  $\Delta$  до третьего порядка имеет вид:

$$\Delta(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{A}{r^3}. \quad (4)$$

Для упрощения использованы единицы, нормализованные на массу ЧД:  $\hat{r} = r/M$ ,  $q = Q^2/M^2$ ,  $\alpha = A/M^3$ . В Планковской системе единиц ( $G = c = \hbar = 1$ ), параметры  $M$ ,  $Q$ ,  $A$ ,  $r$  безразмерны. Такая параметризация позволяет редуцировать конфигурационное пространство до двумерного. Тогда, метрическая функция  $\Delta$  примет вид:

$$\Delta(\hat{r}) = 1 - \frac{2}{\hat{r}} + \frac{q}{\hat{r}^2} + \frac{\alpha}{\hat{r}^3}. \quad (5)$$

Положение горизонта определяется уравнением  $\Delta(\hat{r}_h) = 0$ . При этом количество корней уравнения определяет количество горизонтов ЧД, физический смысл из которых представляет внешний. Так как метрическая функция  $\Delta$  имеет третий алгебраический порядок, ЧД может иметь до трёх горизонтов. Если  $\alpha = 0$  и  $q > 1$ , функция  $\Delta$  всегда положительна, значит, пространство-время не содержит горизонта вообще. Для  $\alpha \geq 0$  функция  $\Delta$  может иметь 2, 1 или 0 корней (в зависимости от значения  $q$ ). Случай отсутствия корней — это “голая сингулярность” (ГС), рассмотрение которой лежит за границами применимости обсуждаемой модели. В случае  $\alpha < 0$  функция  $\Delta$  может иметь 1, 2 или 3 корня (в зависимости от  $q$ ) (Рис. 2).

Кривые перехода между состояниями ЧД с различным количеством горизонтов можно получить решив систему уравнений:

$$\Delta(\hat{r}) = 0, \quad \frac{d\Delta(\hat{r})}{d\hat{r}} = 0. \quad (6)$$

Зависимость  $q(\alpha)$  для системы (6) получена численно. Решения представлены на Рис. 1, 4. В точках, соответствующих кривым, происходит слияние двух горизонтов в один. В случае с  $\alpha \geq 0$  должен происходить переход от чёрных дыр к “голым сингулярностям”. В случае  $\alpha < 0$  происходит переход к более компактным ЧД. Его можно описать как скачкообразное уменьшения радиуса внешнего горизонта.

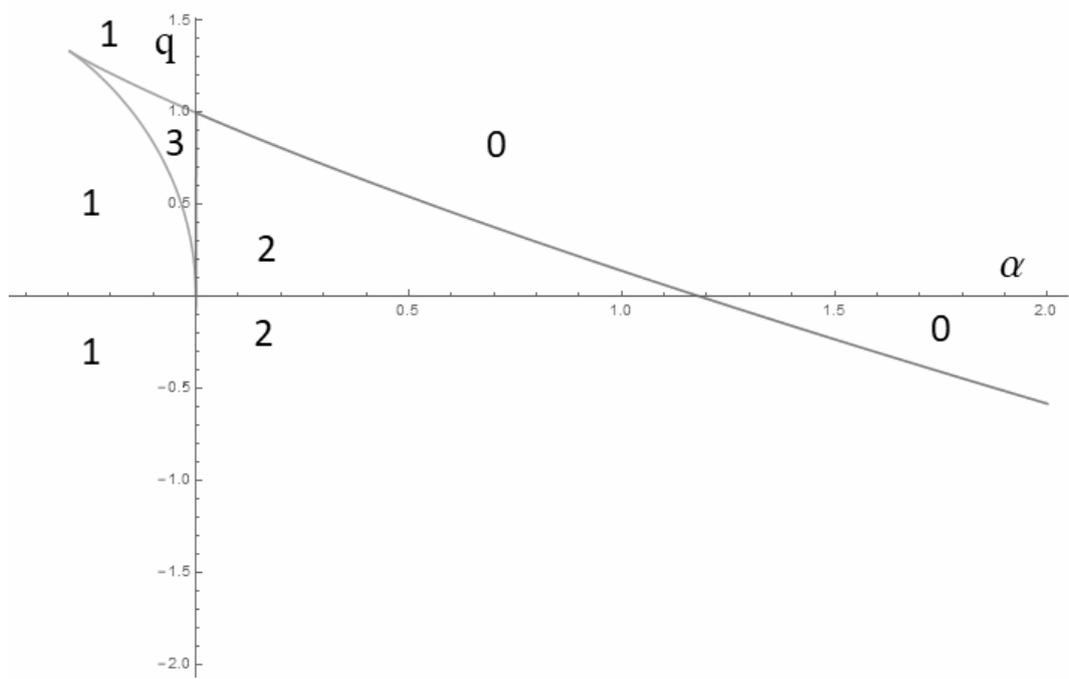


Рис. 1: Количество горизонтов черной дыры в зависимости от значений параметров  $q$  и  $\alpha$ . Верхняя кривая соответствует скачку радиуса внешнего горизонта и границе "голых сингулярностей" (Для  $\alpha \geq 0$ ). Нижняя кривая – появлению дополнительных внутренних горизонтов.

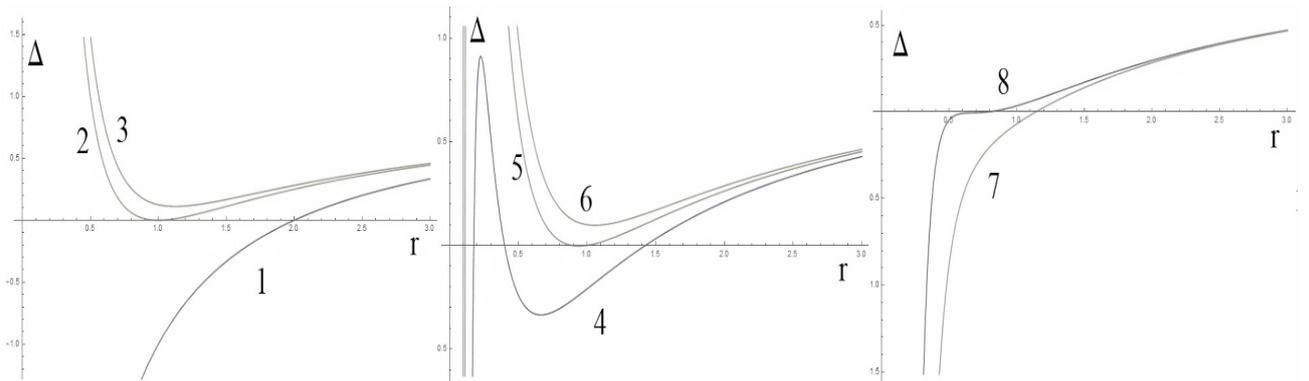


Рис. 2: График метрической функции  $\Delta$  с различными значениями  $q$  и  $\alpha$ . 1)  $\alpha = 0, q = 0$ : Швардшильдовская ЧД. 2)  $\alpha = 0, q = 1$ : ЧД до исчезновения горизонта. 3)  $\alpha = 0, q = 9/8$ : "Голая сингулярность". 4)  $\alpha = -0.1, q = 0.89$ : 3-горизонтная ЧД. 5)  $\alpha = -0.1, q = 1.1$ : 2-горизонтная ЧД до исчезновения горизонта. 6)  $\alpha = -0.1, q = 1.2$ : более компактная ЧД. 7)  $\alpha = -0.4, q = 1.33$ : 1-горизонтная. 8)  $\alpha = -0.296, q = 1.33$ : конец кривой исчезновения горизонта.

# Тень и гравитационное линзирование

Обозначим координату радиуса в картинной плоскости изображения ЧД как " $D$ ". Величина выражена в нормированных планковских величинах. Случай  $\alpha = 0$  соответствует метрике РН и был изучен в статье [10]. Им была получена аналитическая зависимость размера тени от электрического или приливного зарядов, имеющая вид:

$$D = \sqrt{\frac{(8q^2 - 36q + 27) + \sqrt{(8q^2 - 36q + 27)^2 + 64q^3(1 - q)}}{2(1 - q)}}. \quad (7)$$

Минимальный размер тени ЧД равен  $D = 4$  при  $q = 1$ . Для случая  $q > 9/8$  у объекта отсутствует эффект тени (нет фотонной сферы). Но при  $q > 1$  объект становится ГС. Поэтому в модели РН тень исчезает только у ГС.

По аналогии с методом, описанным в [20], уравнение геодезических для фотонов, пролетающих рядом с ЧД, будет выглядеть так:

$$\left(\frac{d\hat{r}}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{\hat{r}} + \frac{q}{\hat{r}^2} + \frac{\alpha}{\hat{r}^3}\right) \frac{L^2}{\hat{r}^2} = E^2, \quad (8)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{\hat{r}^2}, \quad (9)$$

где  $E$  — энергия фотона,  $L$  — угловой момент фотонного пучка,  $\tau$  — аффинный параметр. После подстановки (9) в (8) уравнение движения примет вид:

$$u(r) = \left(\frac{d\hat{r}}{d\phi}\right)^2 = \frac{\hat{r}^4}{D^2} - \hat{r}^2 \left(1 - \frac{2}{\hat{r}} + \frac{q}{\hat{r}^2} + \frac{\alpha}{\hat{r}^3}\right), \quad (10)$$

где  $u = (d\hat{r}/d\phi)^2$ , а  $D = L/E$  — прицельный параметр фотонного пучка. Он соответствует координате на плоскости изображения. Функция  $u(r)$  зависит от трех параметров:  $D$ ,  $q$ , и  $\alpha$ . Так как  $u = (d\hat{r}/d\phi)^2$ , она может принимать только неотрицательные значения. Поэтому, движение возможно только, когда правая часть уравнения (10) неотрицательна.

Край тени соответствует переходу на круговую фотонную орбиту. Система уравнений, её описывающая, будет иметь вид:

$$u(r) = 0, \quad \frac{du(r)}{dr} = 0. \quad (11)$$

Численное решение системы представлено на Рис.3. С увеличением значений параметров  $q$  и  $\alpha$  уменьшается размер тени  $D$ . Существуют такие значения  $q$  и  $\alpha$ , при которых решение обрывается.

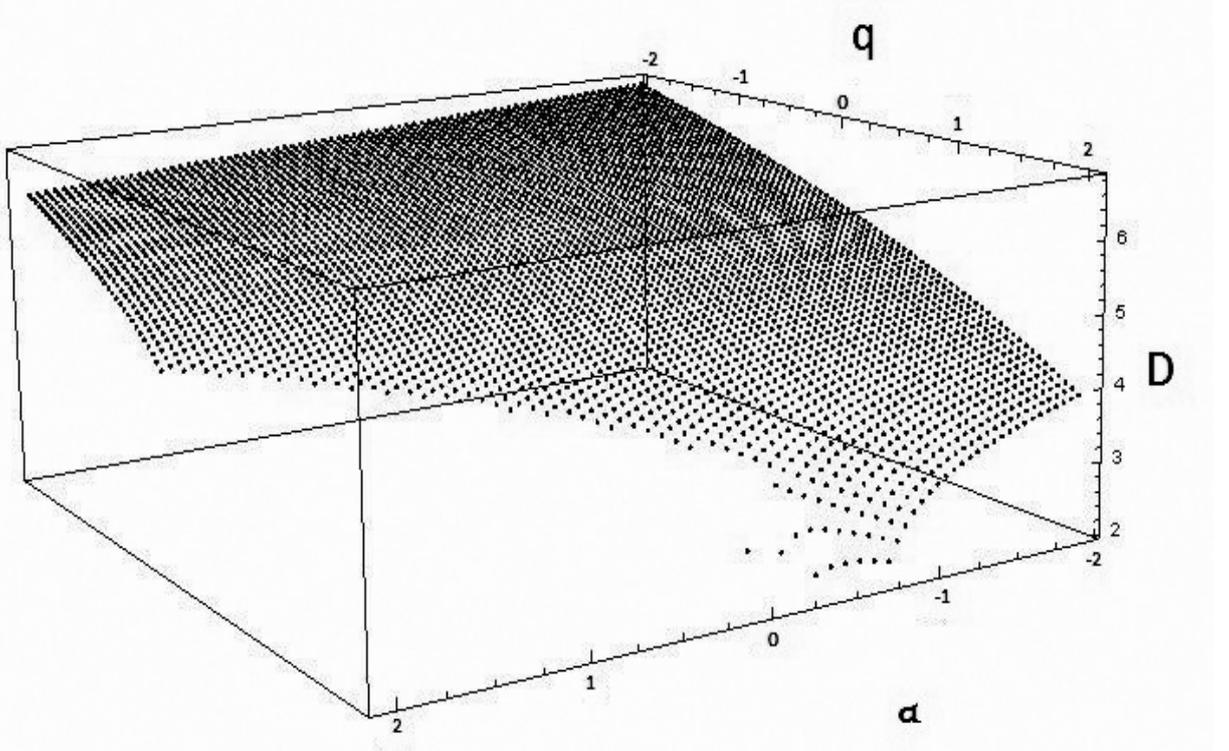


Рис. 3: Зависимость размера тени  $D$  от  $q$  и  $\alpha$

Из Рис. 3 видно, что возможны конфигурации без фотонной сферы, переход к которым в критических точках и назван исчезновением тени. Для ЧД он будет означать скачкообразное уменьшение размеров тёмного пятна. Система уравнений для таких критических точек имеет вид

$$u(r) = 0, \quad \frac{du(r)}{dr} = 0, \quad \frac{d^2u(r)}{dr^2} = 0. \quad (12)$$

Численное решение (12) на конфигурационной плоскости представлено на Рис.4. Кривые исчезновений тени и горизонта не пересекаются и могут быть продолжены только в сторону увеличения значения  $\alpha$ . Для неотрицательных  $\alpha$  тень исчезает только у ГС. Для  $(-0.296 < \alpha < 0.00)$ , тень также исчезает, но у ЧД с более компактным горизонтом ( $r < 0.4$ ). ЧД с  $(\alpha < -0.296)$  будут иметь только 1 горизонт. А для  $\alpha < -0.4$  скачкообразного исчезновения тени не будет.

Заметим, что подход, описанный ниже, применим и для определения размера тени вращающейся ЧД. Вращение деформирует форму тени. Но размер тени в плоскости оси вращения не зависит от этого вращения. Поэтому, если наблюдатель находится на оси вращения ЧД, для него тень не будет деформирована относительно невращающейся ЧД [21].

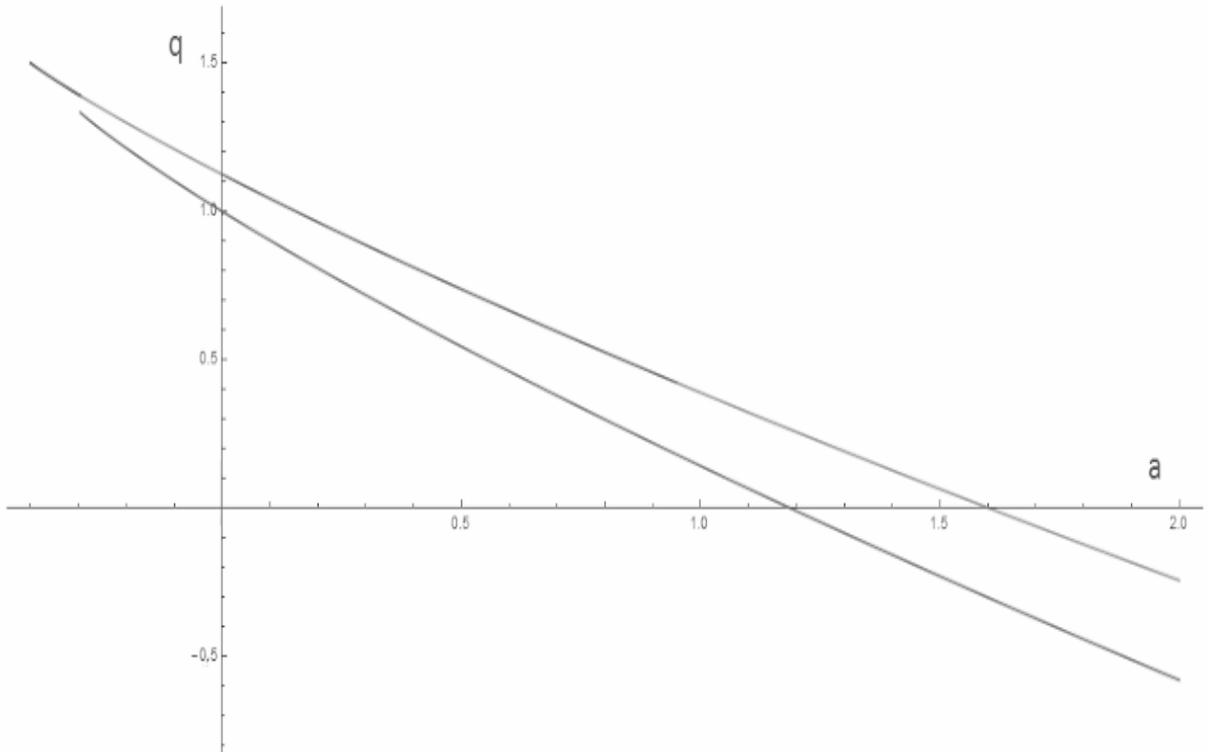


Рис. 4: Сравнение решений исчезновения тени (верхняя кривая) и исчезновения(скачка) внешнего горизонта (нижняя кривая)

В результате добавления третьей поправки теряется взаимно однозначная зависимость размера тени от параметров ЧД. Поэтому, одного источника данных, такого как размер тени ЧД, становится недостаточно для определения параметров  $q$  и  $\alpha$ .

Размер тени для критических точек исчезновения тени представлен на Рис.5. При отсутствии заряда со знаком «+» минимальный размер тени достигает  $D \approx 4.47$  при  $q = 0$ ,  $\alpha = 1.6$ .

Наличие фотонной сферы не является достаточным условием формирования тени в виде пятна. Если уравнение движения (10) содержит дополнительный корень вне горизонта, то свет может рассеяться под фотонной сферой, что приведет к формированию тени в виде тонкого кольца и нерастянутого изображения самого объекта в центре. Появление дополнительного корня уравнения (10) является побочным решением системы (12). На Рис. 6 представлена область параметров, где этот эффект может реализоваться. Однако, данный эффект происходит на масштабах, значительно меньше шварцшильдовского радиуса, где использование данной метрики может лежать за границами применимости модели. Поэтому сложно сказать о реализуемости данного эффекта на реальных ЧД.

Гравитационное линзирование даёт дополнительную информацию о параметрах метрики, так как ЧД с одинаковым размером тени могут иметь различное внешнее поле, действуя как разные гравитационные линзы. Для построения геодезических гравитационного линзирования используется уравнение движения (10). Нами численно была получена

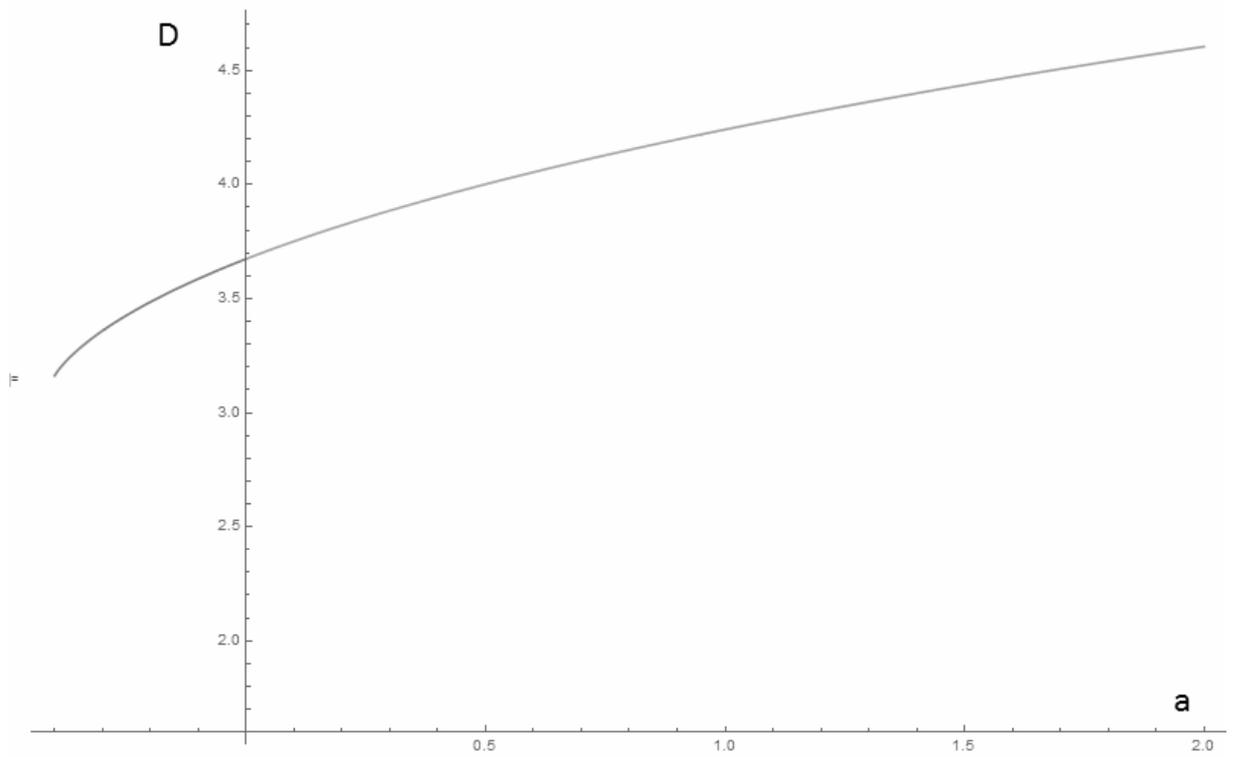


Рис. 5: Зависимость  $D(\alpha)$  от  $\alpha(q)$  критического размера тени.

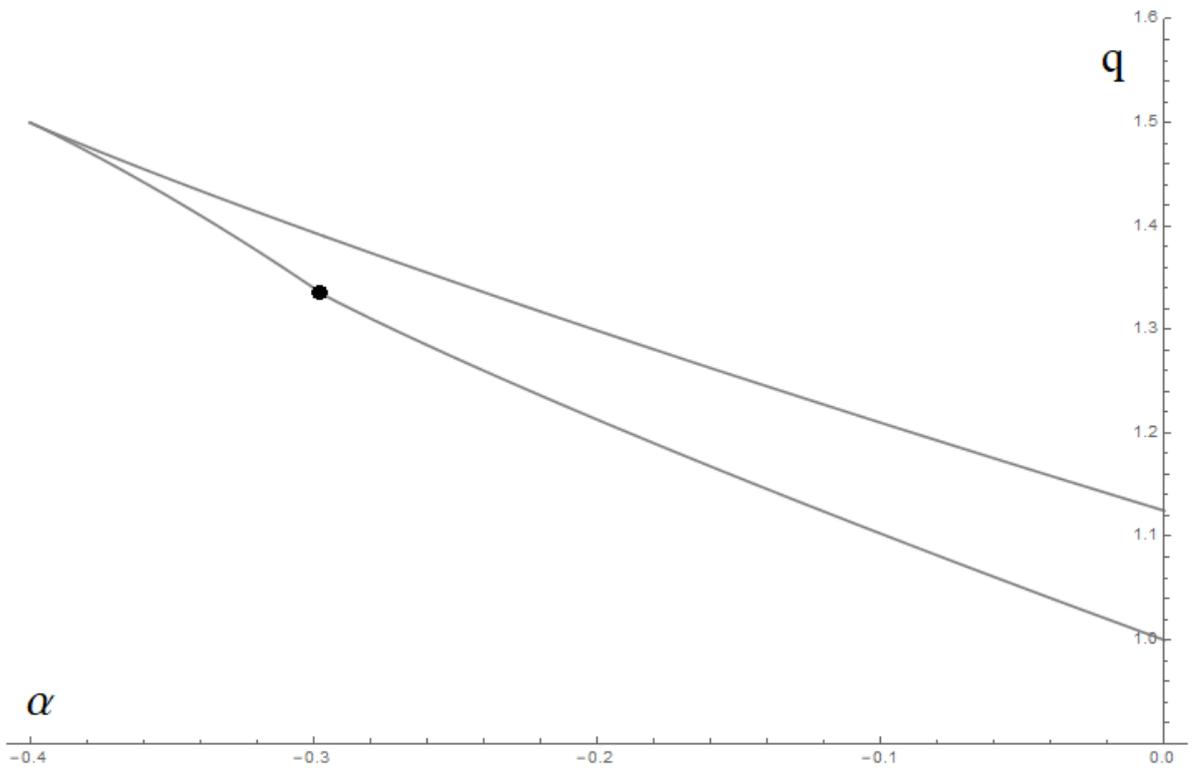


Рис. 6: Область кольцевой тени более компактных ЧД. Верхняя граница — решение исчезновения тени. Нижняя справа от точки — решение скачка размера горизонта, слева — решение появления дополнительного корня (10).

зависимость между углом отклонения, параметрами  $q$ ,  $\alpha$  и положением звезды на изображении (выраженном через прицельный параметр). Для фиксированной звезды и фиксированного размера тени была экстраполирована зависимость между положением звезды на изображении  $D$  и параметром  $\alpha$ . Две ЧД с одинаковым размером тени могут иметь различное значение  $\alpha$ , при том, что все ЧД с заданным размером тени параметризованы  $\alpha$ . Случай  $\alpha = 0$  взят как начальная точка, от которой отсчитывалось отклонение положения звезды на изображении. На Рис.(7) представлен график для параметра отклонения:

$$\delta = \frac{|D(\alpha) - D(0)|}{D(0)} \quad (13)$$

для ЧД с размером тени  $D = 3\sqrt{3}$ , и углом отклонения источника света  $\phi = \pi/2$ . График показывает, что отклонение на три порядка меньше чем расстояние источника от центра изображения. Для уточнения параметров ЧД посредством гравитационного линзирования необходима точность как минимум на три порядка больше, чем для определения размеров тени.

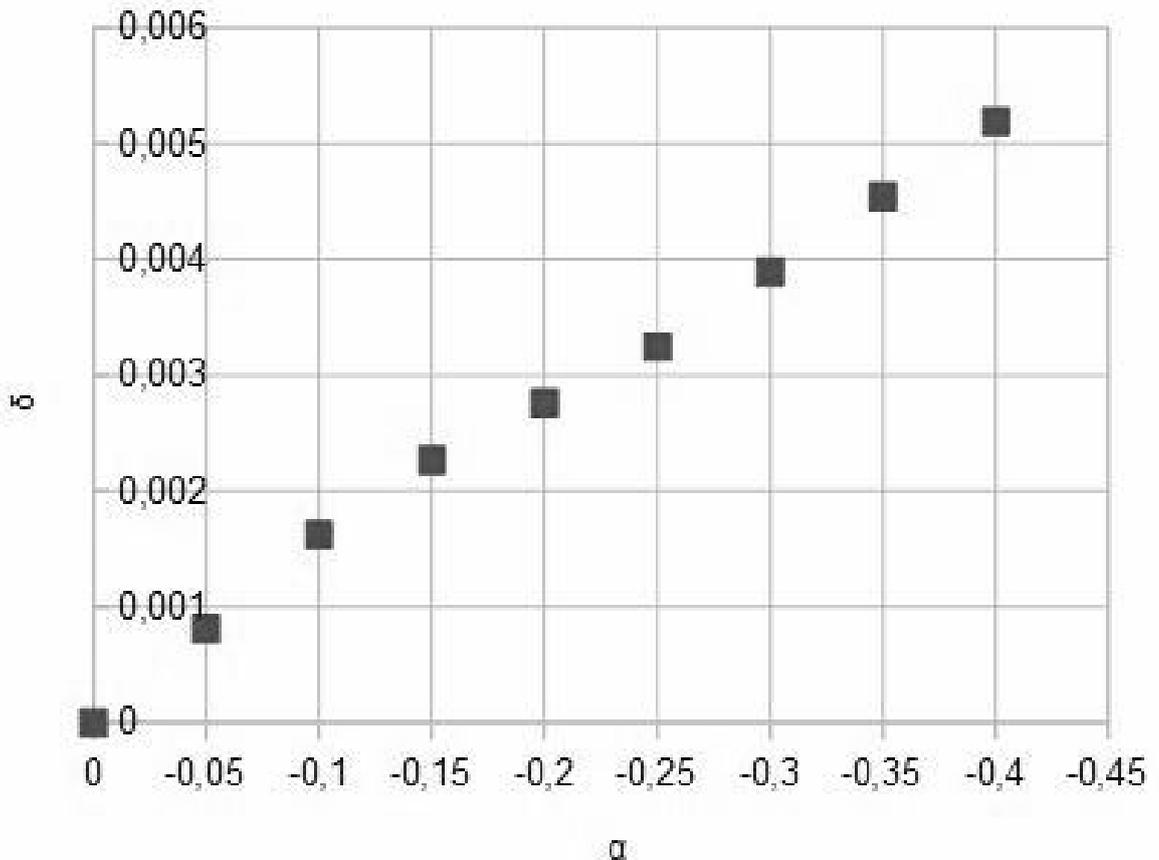


Рис. 7: Параметр отклонения  $\delta = |D(\alpha) - D(0)|/D(0)$  для ЧД с размером тени  $D = 3\sqrt{3}$ .

# Последняя устойчивая орбита

Радиус последней устойчивой орбиты определяет характерный масштаб орбитального движения. Не существует устойчивых круговых орбит под радиусом последней устойчивой орбиты. Поэтому, он является естественным ограничением для внутренней границы аккреционного диска. Этот параметр может быть получен из наблюдательных данных по ЧД. Случай  $\alpha = 0$ , соответствующий метрике РН, был рассмотрен в [11]. Для ЧД минимальный радиус последней устойчивой орбиты равен  $r = 4$ .

Для изучения радиуса последней устойчивой орбиты был выбран хорошо известный подход, описанный [20]. Уравнение движения пробной частицы единичной массы имеет вид:

$$\left(\frac{d\hat{r}}{d\tau}\right)^2 + U = E^2, \quad (14)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{\hat{r}^2} \quad (15)$$

$$U = \left(1 - \frac{2}{\hat{r}} + \frac{q}{\hat{r}^2} + \frac{\alpha}{\hat{r}^3}\right) \left(1 + \frac{L^2}{\hat{r}^2}\right). \quad (16)$$

где  $E$  – энергия частицы,  $L$  – её угловой момент,  $U$  – потенциальная энергия. Движение возможно, если  $E^2 \geq U$ . Орбита будет круговой, если её радиус статичен  $\frac{d\hat{r}}{d\tau} = 0$ , что приводит уравнение (14) к следующему виду:

$$U(\hat{r}_{circ}, L_{circ}) = E^2. \quad (17)$$

Орбита является устойчивой, если функция  $U(\hat{r}_{circ}, L_{circ})$  находится в локальном минимуме. Переход к последней устойчивой орбите осуществляется при смене локального минимума перегибом. Это условие можно записать как:

$$\frac{dU}{dr} = 0, \quad \frac{d^2U}{dr^2} = 0. \quad (18)$$

Исследуемая метрика допускает возможность экзотического решения с нулевым орбитальным моментом:

$$\frac{dU}{dr} = 0, \quad L = 0. \quad (19)$$

Такое решение впервые было описано в [11]. Оно соответствует состоянию, при котором частица может «покоиться» на определённом расстоянии от ЧД, так как в такой точке полная гравитационная сила равна нулю. Такое «равновесие» возможно из-за разных знаков в функции (5). В [11] такие орбиты были названы “орбитами с нулевым моментом”. Отметим, что, скорее всего, обсуждаемый эффект лежит за границей применимости модели, так как радиус этих орбит слишком мал.

Зависимость радиуса последней устойчивой орбиты от значений  $q$  и  $\alpha$  была получена численно и представлена на Рис.8. Она имеет схожий вид с решением для размера тени ЧД. После обрыва решения минимальный размер орбиты ограничивается “орбитами с нулевым моментом”.

Зависимость радиуса последней устойчивой орбиты от  $q$  при фиксированном значении  $\alpha = -0.4$  представлена на Рис.9. Можно заметить, что при определённых параметрах  $q$  и  $\alpha$  система (18) может иметь более одного решения. В таком случае, в качестве радиуса последней устойчивой орбиты следует выбрать орбиту с наибольшим его значением.

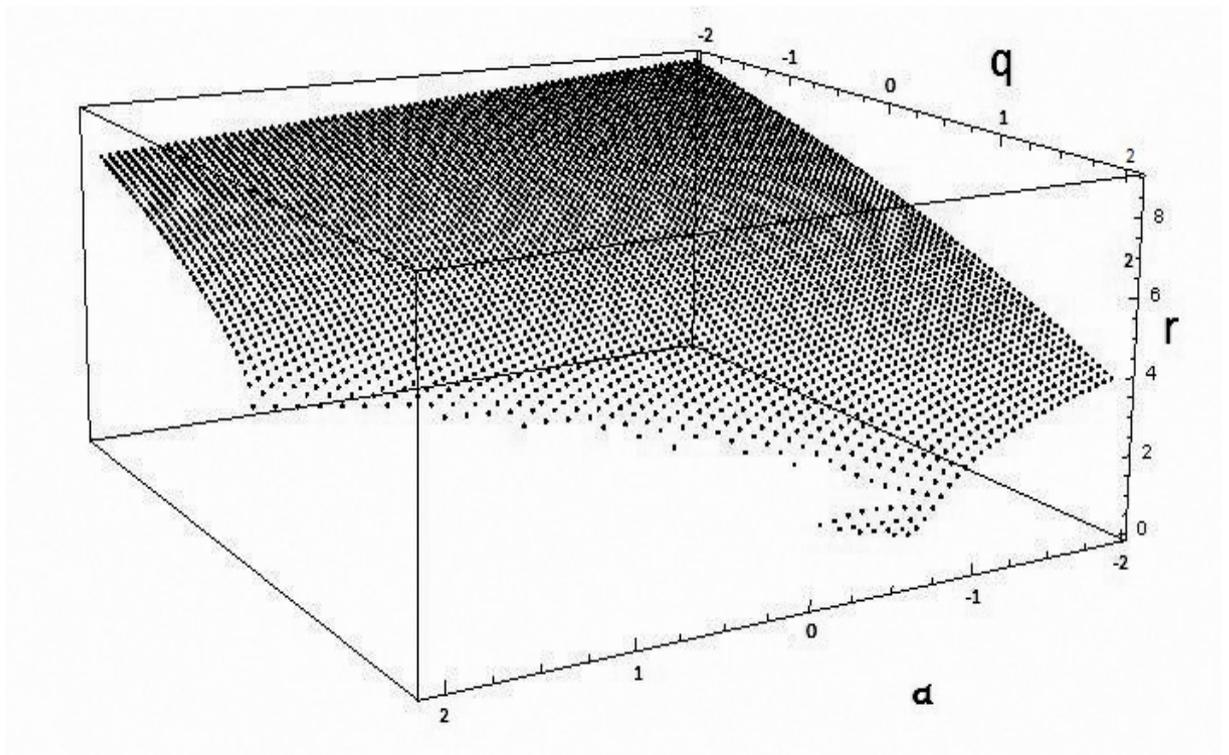


Рис. 8: Зависимость радиуса последней устойчивой орбиты  $r$  от параметров  $q$  и  $\alpha$ )

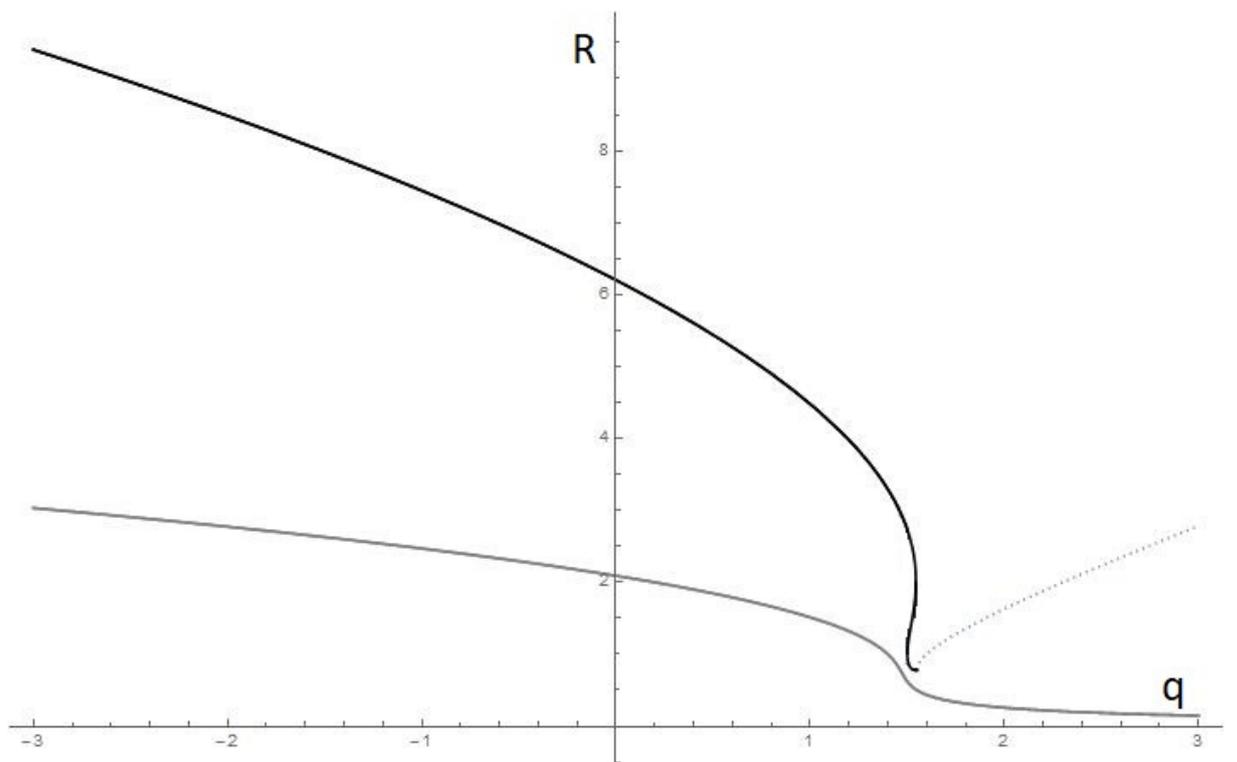


Рис. 9: Радиус последней устойчивой орбиты (верхняя кривая) для  $\alpha = -0.4$ . Нижняя кривая – радиус горизонта ЧД. Пунктирная линия – орбиты с нулевым моментом.

# Выводы

В настоящей работе исследовано расширение метрики Рейсснера-Нордстрема слагаемым третьего порядка по  $1/r$ . Эта метрика представляет собой разложение в ряд Тейлора решения типа “чёрная дыра” для произвольной модели гравитации. Поэтому, он может служить анзацем для сопоставления эмпирических данных и модифицированных моделей гравитации. С помощью наблюдательных данных по тени чёрной дыры и орбитальных движений окружающих её звёзд можно наложить ограничения на параметры такого анзаца.

Анзац вида Рейсснера-Нордстрема (с учётом возможности отрицательного знака при слагаемом второй степени по  $r^{-1}$ ) был изучен в [10, 11]. В этих работах было показано, что минимальный размер тени чёрной дыры достигался при  $q = 1$  и соответствовал прицельному параметру  $D = 4$ . В то же время, минимальный радиус последней устойчивой орбиты достигал  $r = 4$ .

Аналогично предыдущему случаю расширение метрики Рейсснера-Нордстрема до третьего порядка по  $1/r$  может описать чёрной дыры с различными размерами тени. В отличие от случая  $r^{-2}$ , решение  $r^{-3}$  предсказывает скачок размера горизонта чёрной дыры. Схожий эффект возникает и для размера тени. Он может совершить скачок размера при бесконечно малом изменении метрики. Более того, учет членов 3-го порядка позволяет описать чёрную дыру с меньшим размером тени ( $D < 4$ ) и радиусом последней устойчивой орбиты ( $r < 4$ ), в отличие от обычной метрики Рейсснера-Нордстрема.

Уменьшение размера тени может быть достигнуто и за счёт наличия плазменного диска вокруг чёрной дыры [22, 23]. Но последний эффект зависит от длины волны. Его можно отличить от действия третьей поправки с помощью наблюдений в различных спектральных диапазонах.

# Литература

- [1] Clifford M. Will. The Confrontation between General Relativity and Experiment. *Living Rev. Rel.*, 17:4, 2014.
- [2] Salvatore Capozziello and Mariafelicia De Laurentis. Extended Theories of Gravity. *Phys. Rept.*, 509:167–321, 2011.
- [3] Emanuele Berti et al. Testing General Relativity with Present and Future Astrophysical Observations. *Class. Quant. Grav.*, 32:243001, 2015.
- [4] Jose Maria Ezquiaga and Miguel Zumalacarregui. Dark Energy After GW170817: Dead Ends and the Road Ahead. *Phys. Rev. Lett.*, 119(25):251304, 2017.
- [5] Louis Perenon, Christian Marinoni, and Federico Piazza. Diagnostic of Horndeski Theories. *JCAP*, 1701(01):035, 2017.
- [6] Joe Kennedy, Lucas Lombriser, and Andy Taylor. Reconstructing Horndeski models from the effective field theory of dark energy. *Phys. Rev.*, D96(8):084051, 2017.
- [7] Третьякова Д.А. Наблюдательные проявления чёрных дыр в модели гравитации Хорндески. *ЖЭТФ*, 152(3):475–482, 2017.
- [8] Алексеев С.О. Урсулов А.В. Памятных Е.А. Третьякова Д.А., Ранну К.А. Введение в общую теорию относительности. Ее современное развитие и приложения . Издательство УрФУ, 380 с. (2015).
- [9] Naresh Dadhich, Roy Maartens, Philippos Papadopoulos, and Vahid Rezanian. Black holes on the brane. *Phys. Lett.*, B487:1–6, 2000.
- [10] Alexander F. Zakharov. Constraints on a charge in the Reissner-Nordström metric for the black hole at the Galactic Center. *Phys. Rev.*, D90(6):062007, 2014.
- [11] D. Pugliese, H. Quevedo, and R. Ruffini. Circular motion of neutral test particles in Reissner-Nordström spacetime. *Phys. Rev.*, D83:024021, 2011.
- [12] Amitai Y. Bin-Nun. Relativistic Images in Randall-Sundrum II Braneworld Lensing. *Phys. Rev.*, D81:123011, 2010.

- [13] Amitai Y. Bin-Nun. Lensing By Sgr A\* as a Probe of Modified Gravity. *Phys. Rev.*, D82:064009, 2010.
- [14] Amitai Y. Bin-Nun. Strong Gravitational Lensing by Sgr A\*. *Class. Quant. Grav.*, 28:114003, 2011.
- [15] Sheperd Doleman et al. Event-horizon-scale structure in the supermassive black hole candidate at the Galactic Centre. *Nature*, 455:78, 2008.
- [16] Vincent L. Fish et al. 1.3 mm Wavelength VLBI of Sagittarius A\*: Detection of Time-Variable Emission on Event Horizon Scales. *Astrophys. J.*, 727:L36, 2011.
- [17] Alexander F. Zakharov. The black hole at the Galactic Center: observations and models. In *Proceedings, 3rd International Conference on Particle Physics and Astrophysics (ICPPA 2017): Moscow, Russia, October 2-5, 2017*, 2018.
- [18] N. I. Shakura, K. A. Postnov, A. Yu. Kochetkova, L. Hjalmarsdotter, L. Sidoli, and A. Paizis. Wind accretion: Theory and Observations. *Astron. Rep.*(Астрономический журнал), 59(7):645–655, 2015.
- [19] N. I. Shakura and R. A. Sunyaev. A Theory of the instability of disk accretion on to black holes and the variability of binary X-ray sources, galactic nuclei and quasars. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 175:613–632, 1976.
- [20] С. Чандрасекар. Математическая теория черных дыр . Издательство Мир, 276 с. (1986).
- [21] Arne Grenzebach, Volker Perlick, and Claus Lämmerzahl. Photon Regions and Shadows of Accelerated Black Holes. *Int. J. Mod. Phys.*, D24(09):1542024, 2015.
- [22] Volker Perlick, Oleg Yu. Tsupko, and Gennady S. Bisnovatyi-Kogan. Influence of a plasma on the shadow of a spherically symmetric black hole. *Phys. Rev.*, D92(10):104031, 2015.
- [23] Volker Perlick and Oleg Yu. Tsupko. Light propagation in a plasma on Kerr spacetime: Separation of the Hamilton-Jacobi equation and calculation of the shadow. *Phys. Rev.*, D95(10):104003, 2017.