КАФЕДРА АСТРОФИЗИКИ И ЗВЕЗДНОЙ АСТРОНОМИИ
КАФЕДРА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ АСТРОНОМИИ

Проф. А.С. РАСТОРГУЕВ (физфак МГУ), проф. М.Е. САЧКОВ (ИНАСАН)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИУСОВ ПУЛЬСИРУЮЩИХ ЗВЁЗД – КЛАССИЧЕСКИХ ЦЕФЕИД

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Введение. Радиус звезды является одним из ее фундаментальных физических параметров. Как известно, одним из важнейших источников данных о радиусах непеременных звёзд служат наблюдения затменно-двойных звёзд, позволяющие по обстоятельствам затмений рассчитать не только радиусы, но и массы отдельных компонентов. Радиусы достаточно близких звёзд – гигантов и сверхгигантов (к которым относятся и классические цефеиды) – измеряются также в ходе оптических интерференционных наблюдений (VLT, PTI – Паломарский 85-м интерферометр и т.п.; см. рис. 1). Знание звёздных радиусов позволяет точно классифицировать звезду на диаграмме Герцшпрунга-Рассела, а при известной величине поглощения света – оценить её светимость и определить расстояние.

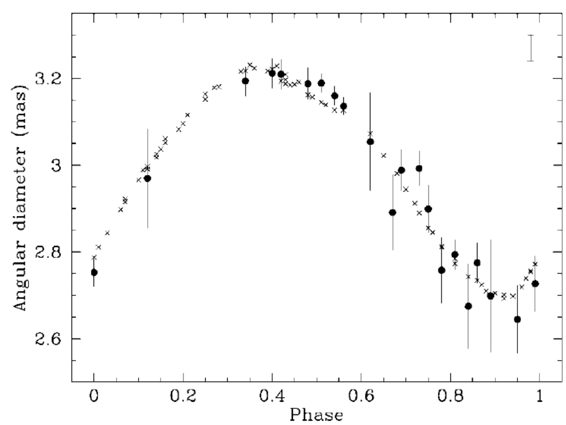

Рис. 1. Сравнение изменений радиуса цефеиды l Car, измеренного с помощью интерферометрической системы ESO VLT (Чили) (точки), с результатами вычислений методом поверхностной яркости (кресты) (из статьи Kervella et al., ApJ V.604, L.113, 2004)

Радиально пульсирующие переменные звёзды (цефеиды, RR-Лириды, Мириды и некоторые другие типы) открывают другую возможность оценки так наз. *пульсационных* радиусов. Суть в том, что индикатором скорости изменения радиуса звёздной фотосферы dR/dt на любой фазе пульсаций является лучевая скорость звезды V_r, которую можно рассматривать как средневзвешенное значение проекции скорости оболочки на луч зрения (с учетом потемнения диска звезды к краю лимба). В первом приближении они пропорциональны. Поэтому, интегрируя кривую изменения лучевых скоростей, мы можем рассчитать кривую изменения линейного радиуса фотосферы и средний радиус звезды. Для этой цели одновременно используются спектральные наблюдения (ряд лучевых скоростей) и фотоэлектрическая кривая изменения блеска.

Метод определения радиуса, использующий пульсации звездной поверхности, был впервые предложен в 1926 году Бааде [1], обсуждался Беккером [2] и позднее был доработан в 1946 году Весселинком [3]; он широко известен в настоящее время как метод Бааде-Беккера-Весселинка. В основе метода лежит физически вполне обоснованное предположение, что в двух фазах пульсационного цикла звезды, соответствующих одному и тому же показателю цвета, различие абсолютного блеска звезды связано с отношением её радиуса в этих фазах (или, что практически одно и то же, поверхностная яркость в этих фазах одинакова). Тогда из разности значений блеска для этих фаз *Δm* можно определить *отношение* значений радиусов, которые имеет звезда в эти моменты времени (рис. 2), а интегрированием кривой изменения лучевых скоростей между двумя фазами одного и того же показателя цвета получаем *разность* этих значений радиусов.

$$\Delta m = -2.5 \lg \frac{R_1^2}{R_2^2}$$

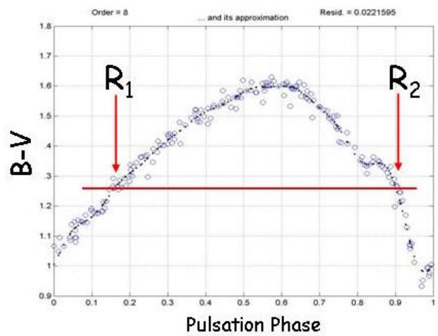

Рис. 2. Иллюстрация метода Бааде-Весселинка. Показана кривая блеска и указаны фазы пульсаций с одинаковыми значениями показателя цвета (B-V).

Появление в последние годы массовых измерений лучевых скоростей цефеид, RR-Лирид и других переменных звёзд с характерными точностями порядка 0.5–1 км/с послужило началом многочисленным работам по определению их пульсационных радиусов (см., например, [4–6]).

1.2. Метод поверхностной яркости (моделирование изменений радиуса)

Первоначально метод Бааде-Беккера-Весселинка развивался как *метод поверхностной яркости* (SB, Surface Brightness). Приведём его краткое обоснование (Барнс и Эванс [7]). Пусть звезда имеет видимый угловой диаметр Θ_{LD} (индекс LD означает, что видимый угловой диаметр определяется с учетом потемнения диска звезды к краю лимба – Limb Darkening) и создает освещённость E_λ в цветовой полосе λ (рис. 3).

Рис. 3 Иллюстрация метода SB (поверхностной яркости).

Освещённость E_λ может быть вычислена через поверхностную яркость звезды Φ_λ и её угловой диаметр Θ_{LD} по очевидной формуле $E_\lambda \sim \Phi_\lambda \cdot \Theta_{LD}^2$, причём, что весьма важно, поверхностная яркость не зависит от расстояния до звезды. Так как видимая величина звезды m_λ непосредственно определяется освещённостью, то $m_\lambda \sim -2.5 \lg E_\lambda$, легко можно показать, что

(1) $$\lg \Theta_{LD} \approx -0.2\, m_\lambda - 2\, F_\lambda + c,$$

где так наз. параметр поверхностной яркости, точное выражение для которого $F_\lambda = \lg T_{eff} + 0.1 \cdot B.C.(\lambda)$ (здесь B.C.(λ) – болометрическая поправка для используемой фотометрической полосы λ),·логарифмически связан с поверхностной яркостью Φ_λ: $F_\lambda = -2.5 \cdot lg\ \Phi_\lambda$. Поскольку поверхностная яркость подчиняется закону Стефана-Больцмана $\Phi_\lambda \sim T_{eff}^4$ и, кроме того, логарифм эффективной температуры связан с показателем цвета CI_λ (CI от Color Index), в первом приближении линейным соотношением

(2) $$F_\lambda \approx a \cdot CI_\lambda + b.$$

Из выражений (1) и (2) легко получаем основную формулу метода поверхностной яркости, или метода моделирования изменений углового диаметра:

(3) $$lg\ \Theta_{LD} \approx -0.2\ m_\lambda - 2 \cdot a \cdot CI_\lambda + const = lg\ \{2(\cdot<R>+\Delta R)/d\}$$

В ней m_λ есть кривая блеска звезды, а CI_λ – её кривая изменения показателя цвета. При использовании этой формулы следует помнить, что m_λ, CI_λ – *исправленные за межзвёздное поглощение блеск и цвет звезды*.

Интегрирование кривой изменения лучевой скорости даёт кривую изменения линейного диаметра звезды $D = d\ \Theta_{LD}$ и, сравнив её с вычисленным изменением видимого углового диаметра, мы можем определить расстояние d до звезды (так наз. *пульсационный параллакс*). Калибровки «параметр поверхностной яркости – нормальный цвет» обычно получают по фотометрическим наблюдениям звёзд постоянного блеска (карликам, гигантам, сверхгигантам) с надёжно определёнными (тригонометрическими) расстояниями и радиусами (см. рис. 4).

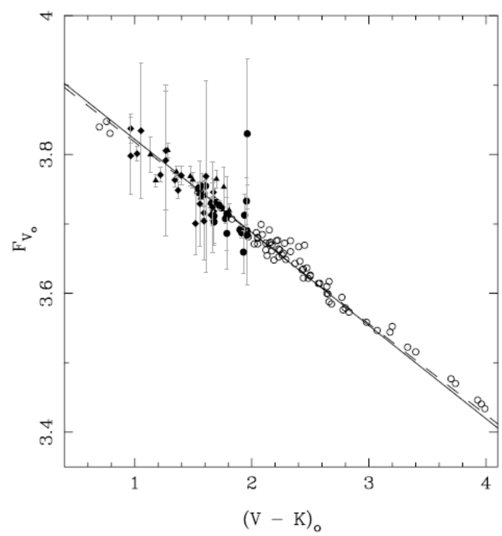

Рис. 4. Пример калибровки параметра поверхностной яркости F_V по нормальному цвету $(V\text{-}K)_0$ (Nordgren et al. AJ V.123, P.3380, 2002): $F_V \approx (3.934 \pm 0.005)-(0.123 \pm 0.002) \cdot (V\text{-}K)_0$.

1.3. Метод максимального правдоподобия (моделирование кривой блеска)

Л.Балона [8] разработал интересную модификацию метода Бааде-Беккера-Весселинка, позволяющую моделировать кривую блеска пульсирующей переменной и непосредственно вычислять её средний радиус.

Метод Балона, используемый в данной задаче, имеет существенное преимущество перед другими модификациями метода Бааде-Беккера-Весселинка: в нем используются непосредственно наблюдаемые величины (измерения блеска, показателя цвета и лучевых скоростей). Предполагается лишь существование линейных (или, в более общем случае, полиномиальных) зависимостей между (а) логарифмом эффективной температуры и нормальным цветом, (б) нормальным цветом и болометрической поправкой, действительных в ограниченном диапазоне температур. Примеры подобных калибровок показаны на рис. 5. И, что весьма существенно, в отличие от метода поверхностной яркости, использование метода Балоне *не требует априорного знания величины межзвездного поглощения* (избытка цвета).

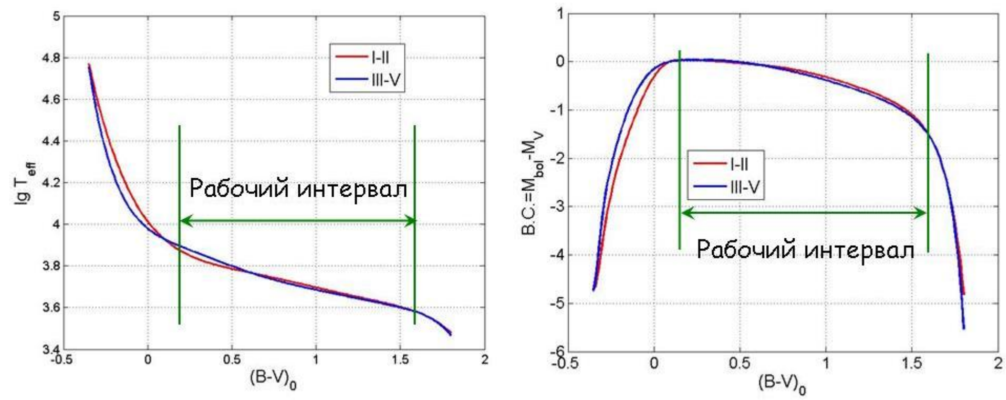

Рис. 5. Калибровки «нормальный цвет – эффективная температура» (слева) и «нормальный цвет – болометрическая поправка» (справа), взятые из статьи [11]. Указан интервал нормальных цветов, характерных для классических цефеид разных периодов. Видно, что в этом цветовом интервале калибровки для разных классов светимости (карликов, гигантов, сверхгигантов) практически совпадают. Их можно аппроксимировать квадратичными зависимостями, а в первом приближении – линейными.

1.4. Вывод основных соотношений метода ББВБ.

Используя закон Стефана-Больцмана, можно записать следующее выражение для болометрической светимости в произвольной пульсационной фазе *i* цефеиды:

$$L_{bol}\,(i) = 4\,\pi R(i)^2\,\sigma T^4_{eff}(i),$$

где R – текущий радиус звезды,
T_{eff} – эффективная температура,
σ - постоянная Стефана-Больцмана.

В дальнейшем для простоты опустим индекс, идентифицирующий фазу пульсаций. Значение разности болометрических звездных величин определяется соотношением:

$$M_{bol} - M_{bol}^{\odot} = -\,2.5\,\lg\,(L_{bol}\,/\,L_{bol}^{\odot}),$$

откуда будем иметь

$$M_{bol} = -\,5\,\lg R/R_{\odot} - 10\,\lg T_{eff} + M_{bol}^{\odot} + 10\,\lg T_{eff}^{\odot},$$

где $M_{bol}^{\odot}$ и $T_{eff}^{\odot}$ - абсолютная болометрическая звездная величина и эффективная температура Солнца, $R/R_{\odot}$ – значение радиуса в данной фазе (выраженное в единицах солнечного радиуса).

Используя (в первом приближении, см. рис. 5) линейность соотношения между нормальным (исправленным за межзвездное поглощение) показателем цвета $(B-V)_0$ и логарифмом эффективной температуры для сверхгигантов спектральных классов *F0-K5*, мы можем преобразовать последнее выражение к виду:

$$M_V = a\,(B\text{-}V)_0 - 5\,\lg\,(\langle R\rangle + r) + c,$$

где $<R>$ - средний радиус звезды, r - изменение радиуса звезды при пульсации, $R=<R>+r$ - мгновенное значение радиуса звезды в данной фазе пульсации (***все радиусы здесь и далее выражены в единицах солнечного радиуса***). Легко понять, что константы a и c содержат $M_{bol}^{\odot}$ и $T_{eff}^{\odot}$ и коэффициенты упомянутых выше линейных калибровочных соотношений.

Теперь можно перейти к непосредственно наблюдаемым величинам – видимой величине V и показателю цвета $(B\text{-}V)$, то есть в явном виде учесть межзвездное поглощение (избыток цвета $E_{B\text{-}V}$) и расстояние. Тогда после несложных преобразований последнее выражение примет следующий вид:

$$V = A\,(B\text{-}V) - 5\,lg\,(<R> + r) + C \tag{3}$$

Это и есть основное уравнение метода Балоне. Определение неизвестных величин – коэффициентов A и C и среднего радиуса $<R>$ – проводится методом максимального правдоподобия.

Все рассуждения останутся справедливыми, если вместо $(B\text{-}V)$ использовать другой показатель цвета, например $(V\text{-}R)$. Более того, хорошо известно, что «длинноволновые» показатели цвета, такие как $(V–I)$, $(V–K)$ и др., а также инфракрасные цвета заметно теснее связаны как с эффективной температурой, так и с болометрической поправкой. Это одна из причин их широкого использования.

Примечание

Для того чтобы учесть отклонения калибровок, показанных на рис. 5, от линейности, в правую часть уравнения (3) лучше явно ввести квадратичный и кубический по показателю цвета члены и переписать его в виде

$$V = A\,(B\text{-}V)+ B\cdot(B\text{-}V)^2 + C\cdot(B\text{-}V)^3 - 5\,lg\,(<R> + r) + D, \tag{4}$$

где A, B, C и D – некоторые константы. Такой подход представляется более корректным и даёт более точные результаты.

Отметим, что Расторгуев и др. [13, 14] существенно усовершенствовали метод ББВБ, предложив использовать для вычисления всех параметров пульсирующих звезд реальные и нелинейные по нормальным цветам калибровки эффективной температуры и болометрической поправки, что позволяет независимо оценить и избытки цвета.

1.5. Определение изменения радиуса *r*

Наблюдаемая лучевая скорость цефеиды V_r отражает как пульсации оболочки (V_{pls}), так и движение звезды относительно Солнца (так называемая гамма-скорость, или средняя скорость звезды V_γ). Изменения пульсационного радиуса определяются только пульсационной кривой лучевых скоростей. При определении радиусов цефеид – членов двойных систем из наблюдаемой лучевой скорости следует вычесть также вклад орбитального движения (V_{orb}):

$$V_{pls} = V_r – V_\gamma – V_{orb}$$

В данной задаче предполагается определение радиусов только одиночных цефеид.

Изменение радиуса r (напоминаем: выраженное в единицах солнечного радиуса) можно получить прямым интегрированием пульсационной кривой изменения лучевых скоростей:

$$r = -\, pP/R_{\odot} \int (V_r \; - V_\gamma)\, d\varphi$$

где P - период пульсаций звезды, $R_{\odot}$ - радиус Солнца, фаза (безразмерная) $\varphi = \{(JD - T_0)/P\}$, ($JD$ – юлианская дата наблюдения, T_0 – момент максимума блеска; фигурные скобки обозначают дробную часть числа), p – так наз. фактор проекции (Projection Factor, далее PF), связывающий лучевую скорость со скоростью движения фотосферы. **Если *r* выражен в единицах солнечного радиуса, период *P* – в сутках, а лучевая скорость V_r и гамма-скорость – в км/с, то последнюю формулу можно переписать в виде**

(5) $$r = -\, p{\cdot}K{\cdot}P \int (V_r - V_\gamma)\, d\varphi\,,$$

где коэффициент $K = 86400/695990$, и ранее для PF часто принимали постоянное значение, равное $\boldsymbol{p \approx 1.31}$ [9]. В данной работе рекомендуется использовать другие значения PF, вычисленные в некоторых современных работах и зависящие от пульсационного периода (что отражает рост коэффициента потемнения к краю лимба звезды с увеличением периода) [12]:

$$p = 1.376 - 0.064 \lg P$$

1.6. Фактор проекции

Для правильного определения пульсационного радиуса (и, соответственно, других параметров) необходим адекватный выбор значения фактора проекции p в приведенных выше выражениях. Физический смысл и принцип расчёта PF показан на рис. 6.

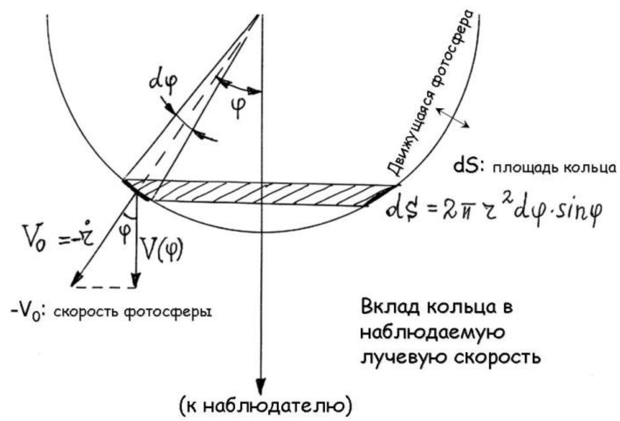

Рис. 6. Иллюстрация к определению «фактора проекции» (PF) p.

Вклад заштрихованного кольца (соответствующего позиционному углу φ) в наблюдаемую лучевую скорость («вес» кольца) определяется не только проекцией его скорости на луч зрения, но и потемнением диска к краю лимба (поскольку центр диска более светлый, чем край) и с учётом этого равен

$$W(\varphi) = 2\pi\; r^2 \sin\varphi \cos\varphi \cdot (1 - \varepsilon + \varepsilon \cos\varphi)$$

где ε – коэффициент потемнения к краю лимба звезды. Поскольку (рис. 6) $V(\varphi) = -\dot{r} \cdot \cos\varphi$, усреднённая по диску звезды лучевая скорость будет равна

$$V_r = \frac{\int_0^{\pi/2} V(\varphi) \cdot W(\varphi)\, d\varphi}{\int_0^{\pi/2} W(\varphi)\, d\varphi} = -\dot{r} \cdot \frac{\int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos^2\varphi\, (1 - \varepsilon + \varepsilon \cos\varphi)\, d\varphi}{\int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi\, (1 - \varepsilon + \varepsilon \cos\varphi)\, d\varphi} = -\frac{1}{p}\dot{r}$$

Это и есть определение PF. Строго говоря, PF может считаться постоянным лишь в первом приближении; в действительности он может зависеть от периода пульсаций, закона потемнения диска к краю, спектральной полосы наблюдений, а также от самой скорости пульсаций фотосферы. Отклонения PF от постоянного значения могут достигать нескольких процентов.

2. ПРОВЕДЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ

2.1. Исходные наблюдательные и каталожные данные

В работе вычисление радиуса цефеиды производится с использованием метода Балона.

Для выполнения работы необходимы:

– ряды измерения лучевых скоростей;
– ряды измерения блеска и показателей цвета;
– значение периода пульсации P;
– значение начальной эпохи (момента максимума блеска) T_0.

Период пульсаций и начальная эпоха изучаемой звезды содержатся в Общем каталоге переменных звёзд [10], но обычно они прилагаются к файлам с рядами наблюдений, используемыми для расчетов.

2.2. Подготовка данных

Файлы с измерениями блеска, показателя цвета и лучевой скорости содержат Юлианские даты (JD) моментов измерений. Для вычислений следует перейти от Юлианских дат к фазам периода пульсации. Очевидно, значение фазы φ есть дробная часть выражения $(JD - T_0)/P$.

Фотоэлектрические и спектральные наблюдения, как правило, проводились в разные моменты времени. Рекомендуется их «сфазировать». Для этого необходимо экстраполировать значения блеска, показателя цвета и лучевой скорости на одни и те же значения фаз. Для плотного покрытия кривых блеска, показателя цвета и лучевых скоростей рекомендуется использовать значения фаз от 0.00 до 0.99 с интервалом 0.01. Чтобы сделать это, каждый из оригинальных рядов наблюдений (блеска, показателя цвета, лучевой скорости) следует аппроксимировать тригонометрическим рядом Фурье (с рекомендуемым порядком аппроксимации 5–6, в зависимости от «крутизны» упомянутых кривых). Коэффициенты разложения Фурье, очевидно, могут быть определены методом наименьших квадратов. Далее с использованием сфазированной кривой изменения лучевой скорости можно путём её интегрирования по формуле (5) рассчитать для каждой фазы изменение радиуса переменной звезды $\boldsymbol{r}$.

Сфазированные значения блеска, показателя цвета и рассчитанные значения изменений радиуса $\boldsymbol{r}$ подставляются в основное выражение метода Балона (3) для определения среднего радиуса $\langle \boldsymbol{R} \rangle$.

2.3. Линеаризация уравнения

В основном уравнении метода Балона искомое значение среднего радиуса звезды $\langle \boldsymbol{R} \rangle$ находится под логарифмом, т.е. уравнение *нелинейно* по этому неизвестному параметру. Для его определения и оценки ошибок лучше всего использовать алгоритмы *нелинейной оптимизации*. Если же используется стандартный линейный алгоритм наименьших квадратов, рекомендуется линеаризовать это уравнение. Раскладывать логарифм в линейный ряд по отношению $r/<R>$ некорректно, т.к. величина $r/<R>$ не всегда мала. Однако можно найти значение $<R>$ последовательными итерациями. Для этого на каждом шаге $<R>$ представляют в виде суммы предыдущего приближения R_{i-1} и поправки ΔR_i:

$$R_i = R_{i-1} + \Delta R_i \,.$$

Мы можем считать малой величину $\Delta R_i /(R_i + r)$ и, задавая правдоподобное начальное значение R_0 (например, 30 – 50), определить значение ΔR_1. В качестве следующего начального приближения принимают величину $R_0 + R_1$ и повторяют итерацию. Через некоторое количество шагов (реально 3 – 5) процесс сойдется и будет определено искомое значение <R>.

2.4. Представление результатов

После того как будет найдено значение среднего радиуса переменной <R> и его ошибка, следует подставить <R> в правую часть исходного уравнения (3) и *рассчитать* «модельную» кривую блеска (поскольку в правой части теперь уже стоят все известные величины и функции – кривая показателя цвета, изменение лучевой скорости и радиуса), для того чтобы сравнить с наблюдаемой кривой блеска и проверить качество решения.

Рекомендуется провести расчёты для нескольких цветов (при наличии соответствующих рядов наблюдений) и сравнить получившиеся оценки радиусов.

Рекомендуется также провести вычисления с использованием основного уравнения с квадратичным по цвету членом (4) и сравнить качество двух решений (т.е. близость «модельной» и наблюдаемой кривых блеска). Пример соответствия «модельной» и наблюдаемой кривой блеска для одной из цефеид показан на рис. 7.

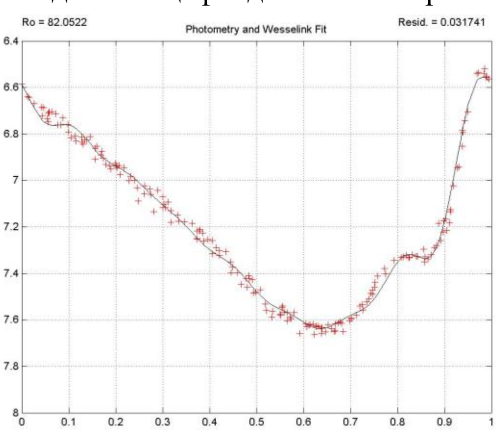

Рис. 7. Сравнение «модельной» (красные кресты) и наблюдаемой (сплошная чёрная линия) кривых блеска по итогам расчётов пульсационного радиуса (*82* $R_{\odot}$). Пример хорошего согласия.

3. ЛИТЕРАТУРА

1. Baade W. Astr. Nachr., V. 228, P.359, 1926.
2. Becker W. ZAph., V.119, P.289, 1940.
3. Wesselink A.J. Bull. Astr. Inst. Netherland, V. 10, P. 91, 1946.
4. Laney C.D., Stobie R.S. MNRAS, V. 274, P. 117, 1995.
5. Ripepi V., Barone F., Milano L., Russo G. Astron. Astrophys., V. 318, P. 797, 1997.

6. Сачков М.Е., Расторгуев А.С., Самусь Н.Н., Горыня Н.А. «Радиусы 62 классических цефеид», Письма в астрон. журн., Т. 24, №6, С. 443, 1998.
7. Barnes T., Evans D., MNRAS V.174, P.489, 1976.
8. Balona L.A. MNRAS, V. 178, P. 231, 1977.
9. Parsons S.B. Astrophys. J., V. 174, P. 57. 1972.
10. Электронная версия ОКПЗ: http://www.sai.msu.su/gcvs/
11. Flower P., Astrophys.J., V.469, P.355, 1996.
12. Nardetto N., Mourard D., Mathias Ph. et al., Astron Astrophys., V.471, P.661, 2007.
13. Расторгуев А.С., Дамбис А.К. «Классические цефеиды: новая версия метода Бааде-Беккера-Весселинка», Астрономический бюллетень, Т.66, С.47-53, 2011
14. Rastorguev A.S., Dambis A.K., Zabolotskikh M.V., Berdnikov L.N., Gorynya N.A. “ The Baade-Becker-Wesselink technique and the fundamental astrophysical parameters of Cepheids”, Proc. of the IAU Sympos. V.289, 195-202, 2013.