

КАФЕДРА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ АСТРОНОМИИ  
ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ им. М.В.ЛОМОНОСОВА

ПРАКТИКУМ ПО АСТРОНОМИИ. 3 курс, 6 семестр

**Изучение периодичностей в рядах астрономических данных  
(д.ф.-м.н., зав. кафедрой экспериментальной астрономии,  
профессор А.С.Расторгуев)**

**1. Введение**

Исследование характера временных изменений различных наблюдательных характеристик – одна из важных задач, с которой постоянно сталкиваются не только астрономы, но и представители других естественных наук. Подобные задачи часто встречаются также в технике и экономике. Подходы к анализу временных рядов описаны в многочисленных статьях и книгах, из которых мы упомянем только исчерпывающую монографию В.Ю.Теребижа [1], снабжённую обширным списком литературы.

Под временным рядом мы будем далее понимать упорядоченную во времени совокупность дискретных измерений некоторой физической величины [1]. В астрономии это может быть блеск звезды, её лучевая скорость, показатели активности Солнца (число солнечных пятен), или любая другая характеристика, получаемая в процессе астрономических наблюдений. Многие физические процессы в астрономических объектах в принципе описываются функциями, близкими к периодическим. Наблюдения (измерения) приносят нам информацию о процессах, считываемую в определённые моменты времени. Важной особенностью подавляющего большинства астрономических временных рядов является их неравномерность, т.е. непостоянство интервалов времени между последовательными измерениями. Очевидно, это связано со спецификой астрономических наблюдений (ясное ночное время, слабая засветка неба луной, невозможность наблюдать большинство объектов в течение всего года и др.). В то же время большинство статей и научных монографий посвящены анализу именно равномерных временных рядов, для которых построена довольно стройная теория.

В данной работе мы познакомимся с наиболее часто используемыми методами анализа неравномерных временных рядов. Должны быть получены следующие результаты:

- (1) определены периоды изменения наблюдаемой величины с помощью периодограммы;
- (2) построены фазовые кривые (кривые блеска для переменных звёзд);
- (3) изучена вторичная периодичность для мультипериодических процессов;
- (4) изучено влияние подмены частот (aliasing), т.е. сопряжённость периодов.

## 2. Определение периода с помощью периодограммы

Периодограмма неравномерных временных рядов – эквивалент спектра мощности, характеризующего относительный «вес» различных частотных гармоник в измеренном временном ряду. Очевидно, в реальных задачах речь идёт об оценке спектра мощности выборочного ряда данных. Существует несколько методов вычисления спектра мощности, в основе которых, прямо или косвенно, лежит Фурье-анализ измеренного временного ряда. Основные положения Фурье-анализа, строго говоря, применимы только к равномерным временным рядам. Тем не менее, их не без успеха используют и для неравномерных временных рядов.

В данной практической работе мы познакомимся с использованием трёх методов построения периодограмм. Первый из – метод Диминга [2] – представляет собой распространение стандартного Фурье-анализа на неравномерные ряды, и мы не будем его детально описывать здесь, ограничившись лишь знакомством с программой, в которой он реализован. Второй метод относится к классу непараметрических (его также можно назвать методом сворачивания эпох), он не требует прямого использования Фурье-разложения. Это метод Лафлера-Кинмана [3]. Оба упомянутых алгоритма широко используются исследователями переменных звёзд. В России большую популярность приобрела свободно распространяемая программа WINEFK под операционной системой Windows, созданная В.П.Горанским (ГАИШ МГУ), в которой реализованы оба упомянутых метода. Наконец, третий метод – фазовой группировки данных – как и метод Лафлера-Кинмана, также относится к непараметрическим методом выделения периодичностей [4-7]. Существуют реализации этого метода, различающиеся деталями оценки «качества» фазовой кривой.

### 2.1. Фазовая кривая и сортировка по фазам

Под фазовой кривой понимают график временного ряда как функцию не времени (момента измерений), а фазы, т.е. доли периода, отсчитываемой от некоторого начального момента отсчёта времени. Построение фазовой кривой (кривой блеска) является первой целью исследования изменений блеска переменной звезды. Фактически фазовая кривая даёт представление о форме периодического сигнала. Введём некоторые обозначения. Пусть  $t_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) – моменты измерений, а  $m_i$  – измеренные значения временного ряда. Примем за начальную эпоху (точку отсчёта фаз) момент времени  $T_0$ . Для предварительного анализа он может быть произвольно выбранным. (Если говорить об изучении переменных звёзд, то в большинстве случаев, после того как найден период изменений блеска, в качестве  $T_0$  выбирают момент максимума блеска.)

Оба упомянутых метода используют перебор пробных значений периода  $P$ , начиная с некоторого минимального значения  $P_{min}$  и кончая максимальным значением  $P_{max}$ , выбор которых, как и шага их изменения,

определяется характером и особенностями временного ряда. Для того чтобы обеспечить одинаково хорошую относительную точность вычисления периодограммы как для больших, так и для малых значений пробных периодов, лучше всего использовать равномерную сетку не на шкале пробных периодов, а на шкале пробных частот (или обратных значений периодов). Следовательно, мы будем вести перебор пробных значений величины  $\omega = 1/P$  начиная с  $\omega_{\min} = 1/P_{\max}$  и кончая  $\omega_{\max} = 1/P_{\min}$  с некоторым постоянным шагом  $\Delta\omega$ .

Порядок расчёта таков:

(1) Для текущего значения пробной частоты  $\omega$  фазы отдельных измерений вычисляются по формуле  $\varphi_i = \text{frac}((t_i - T_0) \cdot \omega)$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ); здесь *frac* – дробная часть числа.

(2) После вычисления набора фаз  $\{\varphi_i\}$  временной ряд  $\{m_i(\varphi_i)\}$  отсортировывается в порядке возрастания величины фазы и заново перенумеровывается так, чтобы индексы при фазах возрастали с фазами. Для простоты далее в формулах будем использовать индексы  $k$  для отсортированного ряда, в котором  $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \leq \varphi_N$ .

Отсортированные ряды используются как в метода Лафлера-Кинмана, так и в методе Диминга для оценки периода.

## 2.2. Метод Лафлера-Кинмана

Для отсортированного ряда  $\{m(\varphi_k)\}$  вычисляется статистика Лафлера-Кинмана  $I_{LK}(\omega) = \sum_{k=1}^{N-1} (m_{k+1} - m_k)^2$ , где суммируются квадраты разностей соседних по фазе значений временного ряда. Очевидно, в случае, когда частота  $\omega$  соответствует истинному периоду  $P$  изменений функции  $m(t)$ , фазовые точки будут распределены упорядоченно, фазовая кривая будет сравнительно «тонкой», и статистика Лафлера-Кинмана достигнет близкого к минимальному значения. Для далёких от истинного периода значений  $P$  (и, соответственно, частоты  $\omega$ ) точки  $m(\varphi_k)$  будут хаотично распределены в широкой полосе фазовой диаграммы, и статистика Лафлера-Кинмана будет значительно больше.

## 2.3. Метод фазовой группировки данных

После сортировки по фазам, описанной в п. 2.1, весь интервал фаз  $[0, 1]$  делится на  $M$  подинтервалов одинаковой длины (обычно  $M=10-20$ , в зависимости от полного числа измерений). Пронумеруем их в порядке возрастания фаз от  $j=1$  до  $j=M$ . Для измерений временного ряда  $m(\varphi_k)$ , попавших в  $j$ -й подинтервал фаз, рассчитывается некоторая статистика, характеризующая гистограмму распределения измерений. Например, по стандартным формулам статистики можно вычислить частичную дисперсию значений ряда  $m(\varphi_k)$ ,  $\sigma_j^2$  (средний квадрат отклонения от среднего значения в

подинтервале), и статистику  $I_{PG}(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sigma_i^2$ , которая по своему физическому смыслу близка к дисперсии фазовой кривой, и в случае, когда частота  $\omega$  соответствует истинному периоду  $P$ , эта статистика принимает близкое к минимальному значение.

Итак, поиск периода сводится к определению значения частоты  $\omega$ , при котором функции  $I_{LK}(\omega)$  или  $I_{PG}(\omega)$  достигают своих минимумов. Легко понять, что в общем случае минимальные значения статистик  $I_{LK}(\omega)$  и  $I_{PG}(\omega)$  достигаются для немного различающихся значений частоты (периода).

**Замечание:** Обычно в пакетах программ поиска периодов (в т.ч. WINEFK) используются модификации статистик Лафлера-Кинмана и фазовой группировки данных, для того чтобы на соответствующих периодограммах вблизи истинных периодов располагались максимумы, а не минимумы.

После определения периода строится фазовая кривая  $m(\varphi_k)$ . Для пульсирующей переменной звезды – это кривая блеска или кривая изменения её лучевых скоростей.

### 3. Работа с программой WINEFK.

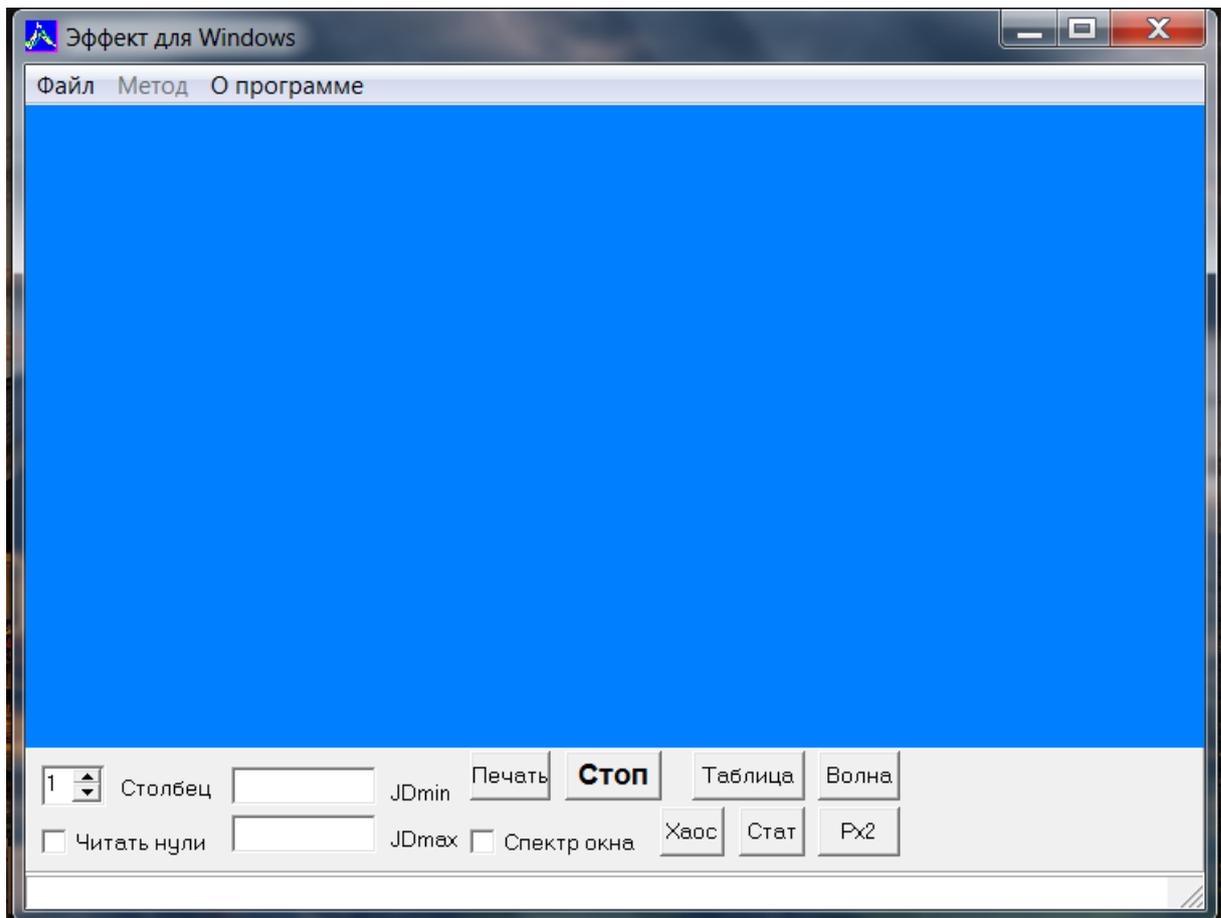
Свободно распространяемая программа WINEFK не требует специальной установки; она запускается из директории, в которую она была записана, с помощью файла программы WINEFK.EXE.

До начала использования программы следует сформировать файл данных, в котором первый столбец содержит юлианскую дату наблюдений (точнее, JD-2400000), а второй и последующие – соответствующие этим датам измерения (например, данные многоцветной фотометрии и т.д.). Файл данных может иметь произвольное расширение.

**Важное замечание:** строки файла данных должны быть отсортированы в порядке возрастания даты наблюдений.

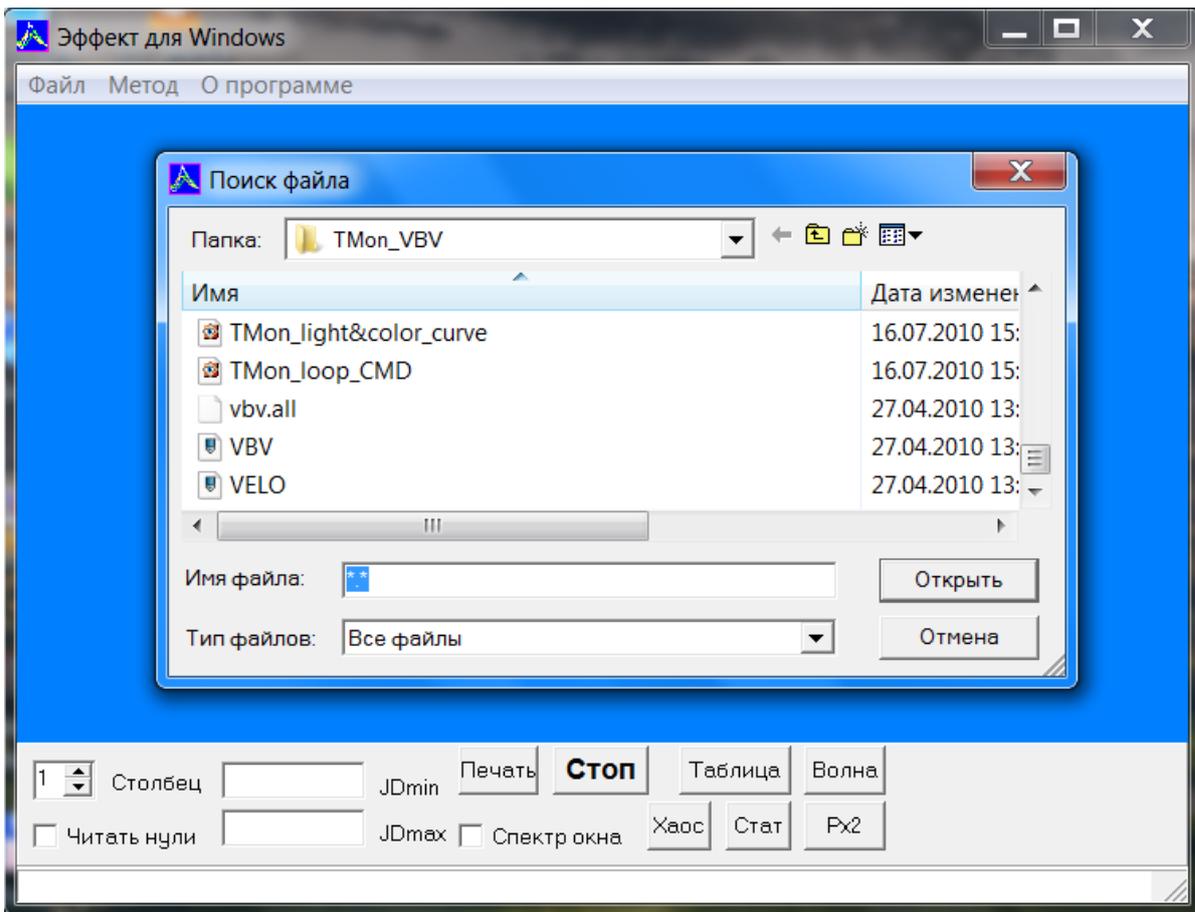
#### 3.1. Определение периода и построение фазовой кривой

**Окно программы:**

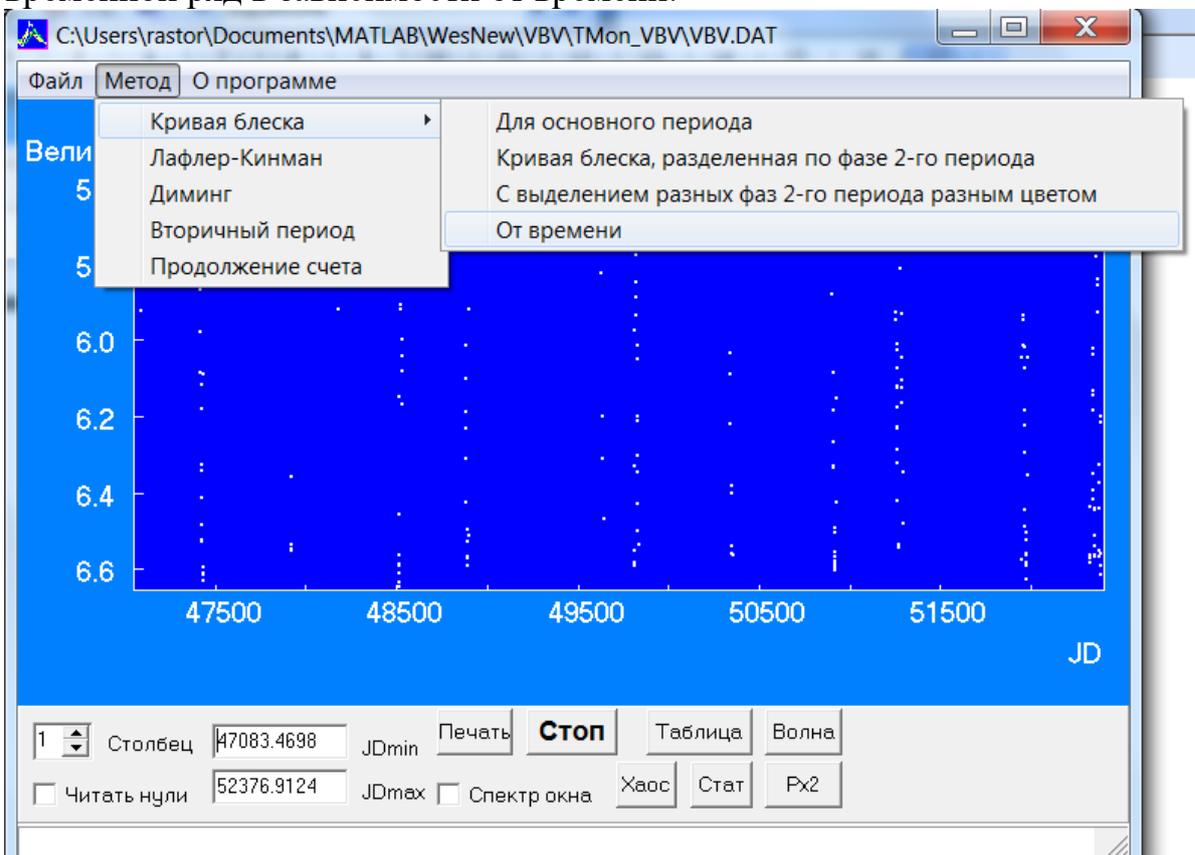


После запуска программы в нижнем меню **Столбец** укажите требуемый номер столбца с данными (имеется в виду нумерация столбцов, содержащих измерения, т.е. номер первый – это второй столбец в файле данных, следующий сразу после даты наблюдений, номер второй – третий столбец и т.д.).

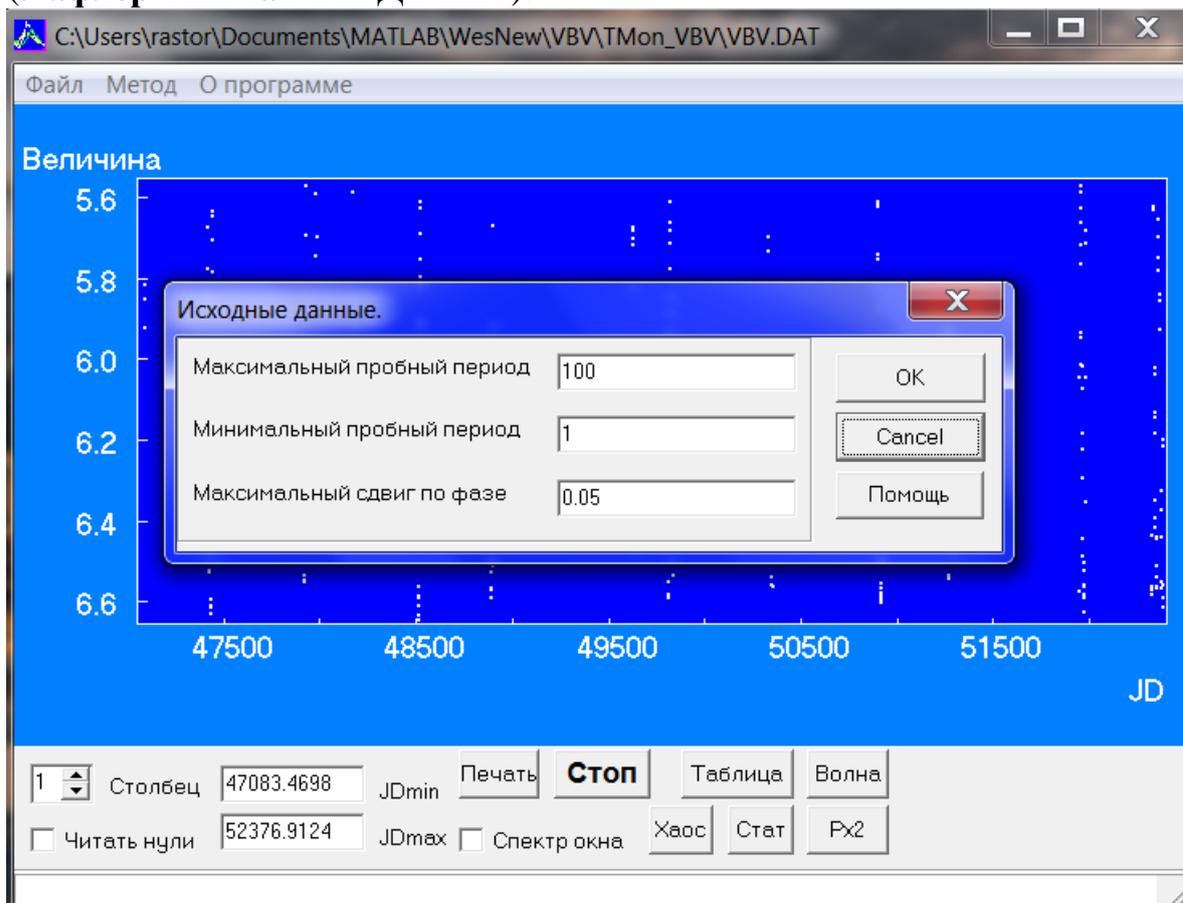
Из верхнего меню **Файл – Открыть** выберите нужный для работы файл данных:



Из меню **Метод – Кривая блеска – От времени** можно просмотреть временной ряд в зависимости от времени:



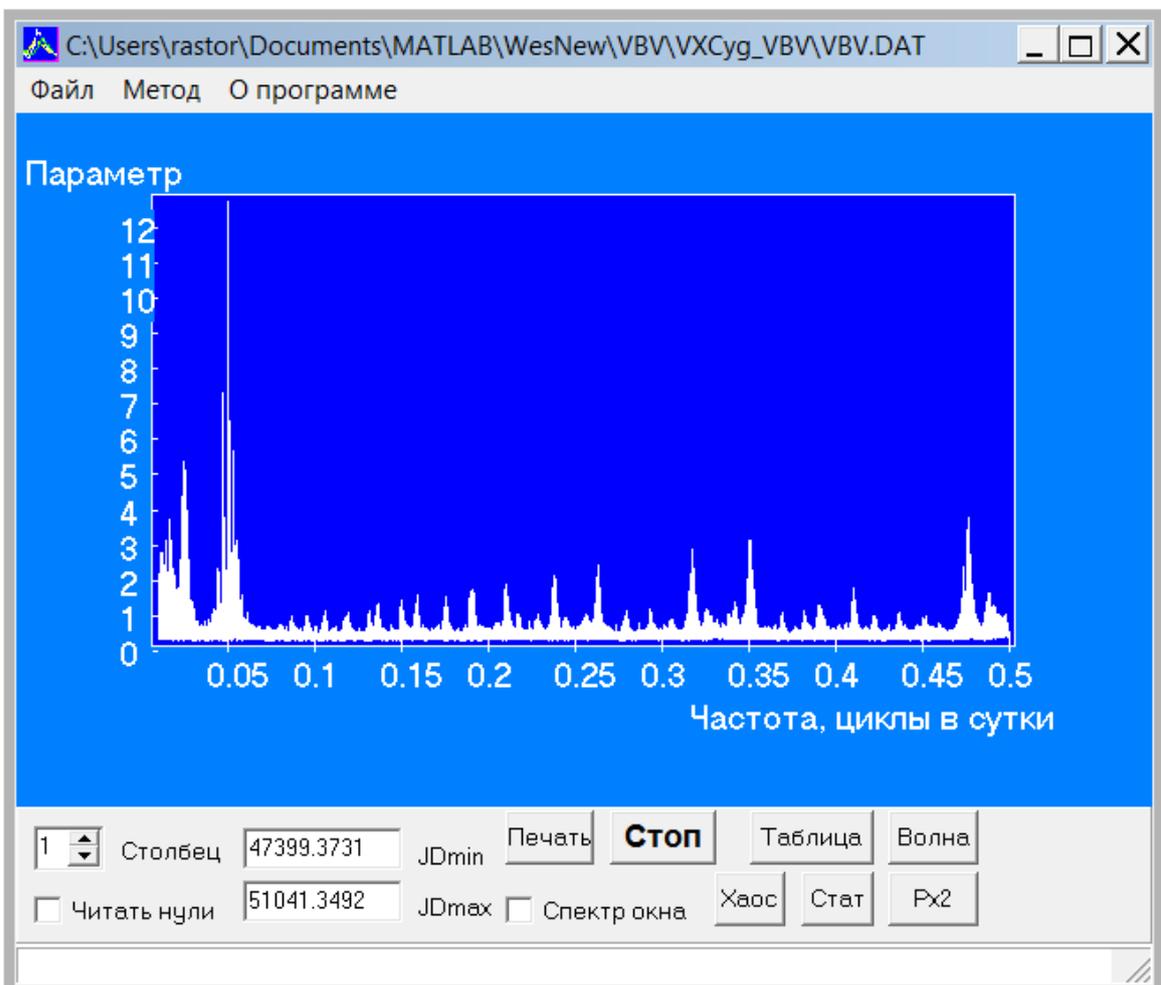
Для начала поиска периода из меню **Метод** выберите желаемый метод (**Лафлер-Кинман** или **Диминг**):



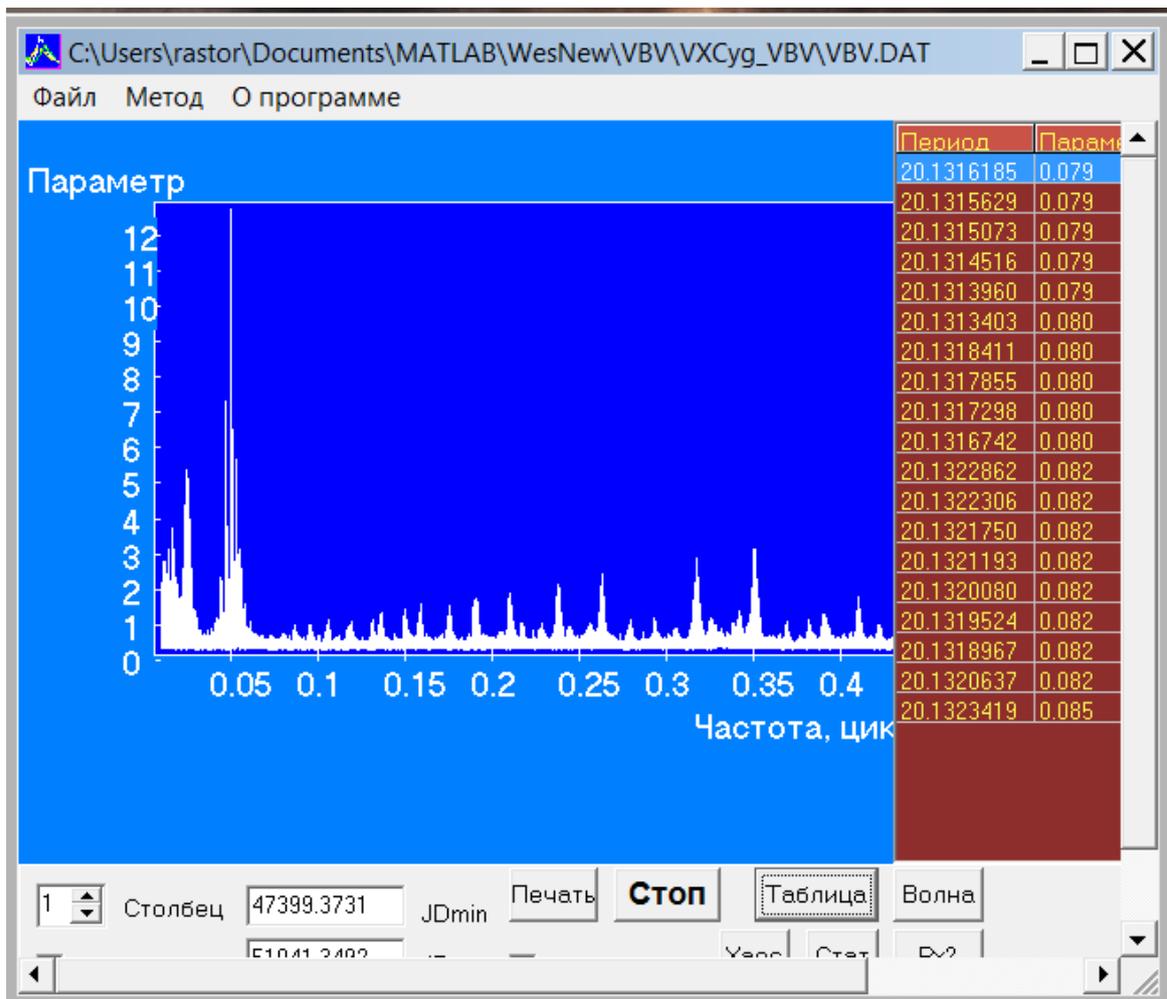
Задайте нужные значения в окнах **Максимальный пробный период** и **Минимальный пробный период**, а также значение шага по частоте в окне **Максимальный сдвиг по фазе**.

**Замечание:** Если интервал пробных периодов велик, для обеспечения высокой относительной точности поиска следует задать малый шаг по частоте, хотя это заметно увеличит время вычислений.

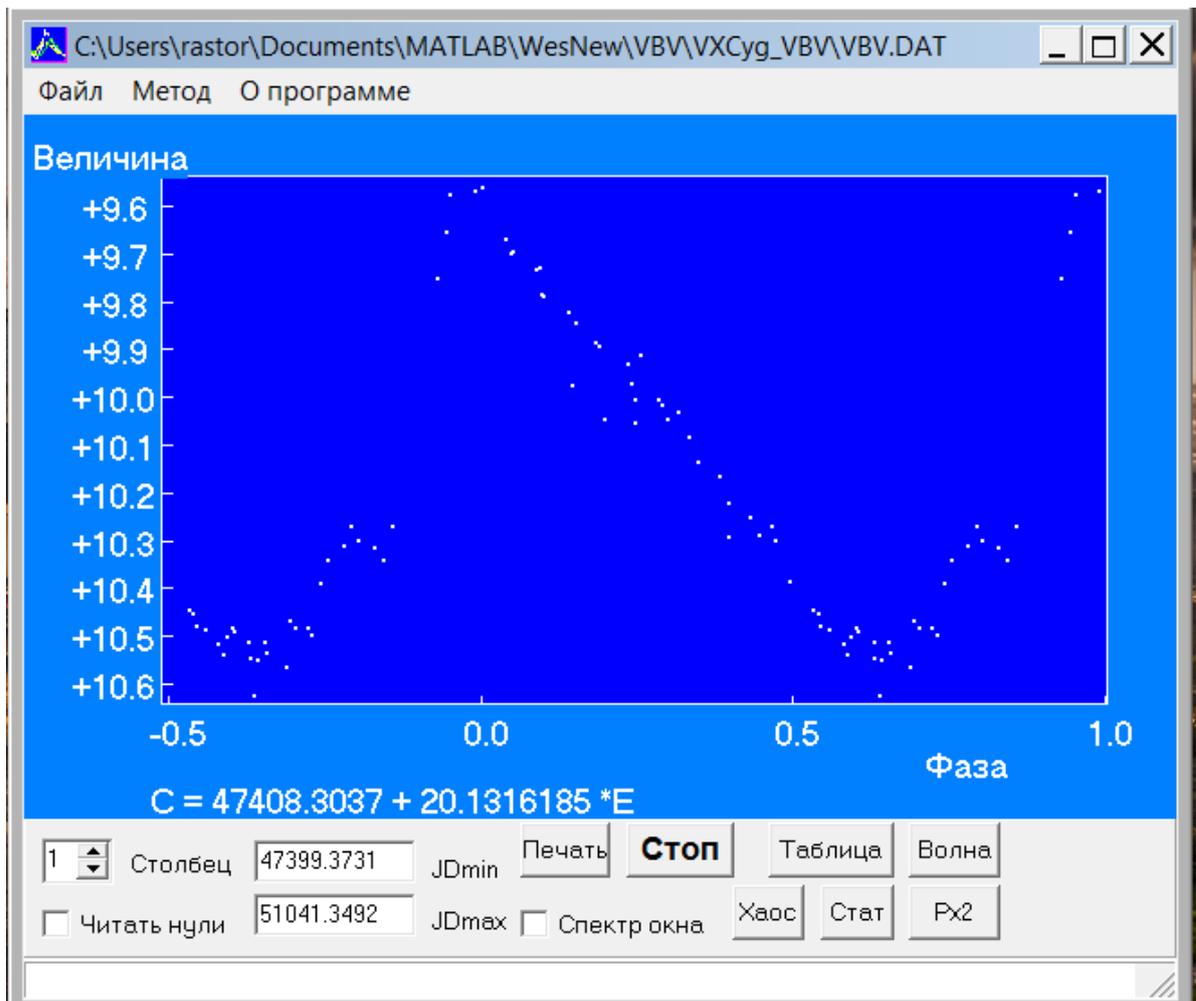
После нажатия на кнопку **ОК** будет рассчитана соответствующая статистика:



Нажав на кнопку **Таблица**, выведете на экран табличку значений пробного периода, дающих максимальные значения параметра статистики (по умолчанию цветом будет выделено значение максимального параметра):



Нажав на нужную строчку таблички (обычно это верхняя строка), выведите на экран фазовую кривую, построенную для интервала фаз  $[-0.5, 1.0]$  для наилучшего представления формы **фазовой кривой**:



**Замечание:** программа WINEFK разработана для анализа кривых блеска переменных звёзд, поэтому числовые значения измеренного временного ряда растут сверху вниз (что естественно при отображении звёздных величин). Нулевую фазу программа автоматически присваивает наибольшим значениям измеренной величины (т.к. в астрономии принято отсчитывать фазы переменности от момента максимального блеска). Непосредственно под окном графика фазовой кривой выдаются параметры: юлианская дата максимального «отсчёта», значение периода и линейная формула для эпох максимума вида  $Max = T_0 + P \cdot E$ .

### 3.2. Поиск второй периодичности

Иногда временной ряд характеризуется не одной, а несколькими периодичностями, чаще всего двумя. Существует целый класс бимодальных переменных звёзд (цефеид, RR-Лирид и др.), пульсирующих сразу в двух модах (например, в основном тоне и первом оберitone). Лучевые скорости спектрально-двойных цефеид отражают как пульсации фотосферы, так и орбитальное движение; такие ряды лучевых скоростей тоже являются примером мультипериодических процессов.

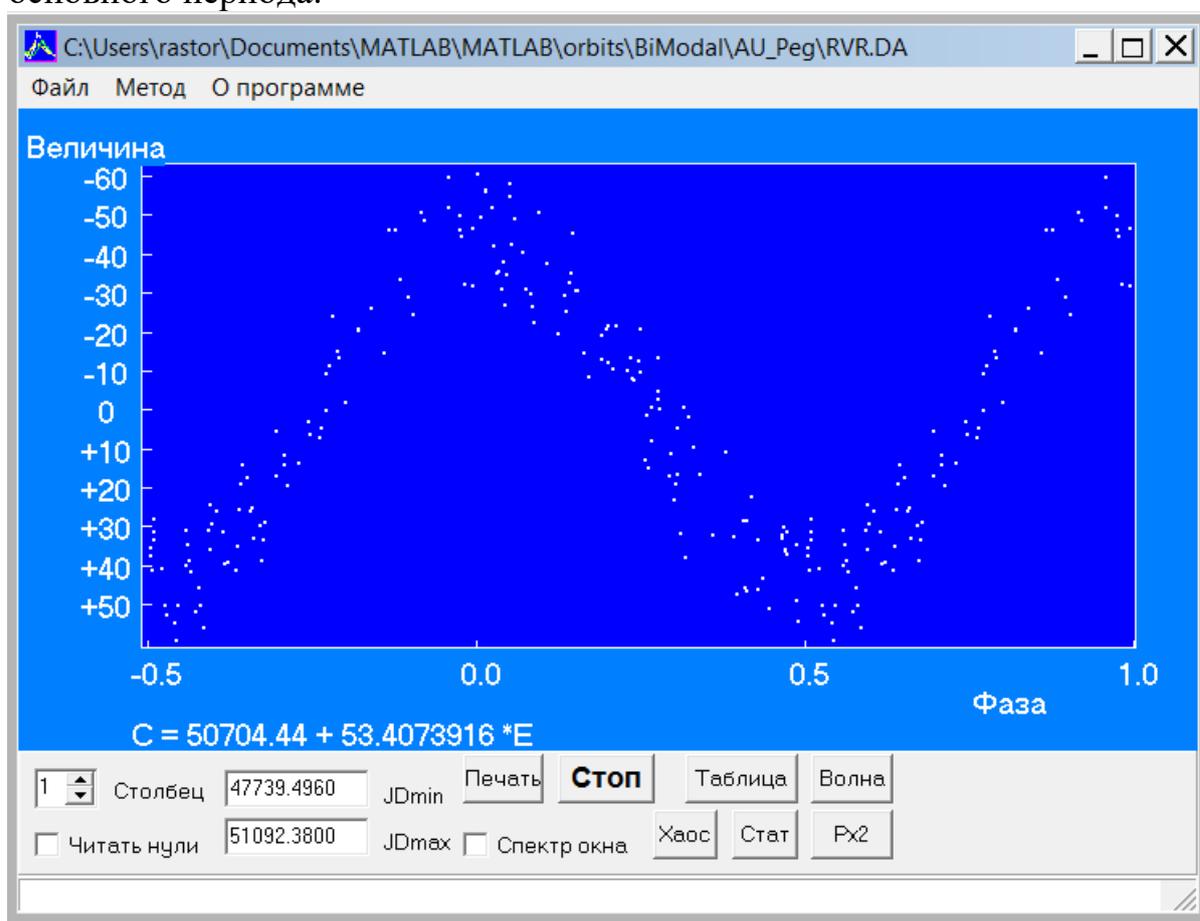
Есть два способа поиска дополнительных периодов. Во-первых, они могут быть сразу заметны на периодограмме. Обычно это бывает, если

вклады разных гармоник в измеренную величину сравнимы. Неизбежные шумы могут скрыть следы мультипериодичности, если относительный вклад разных процессов заметно различается. В таком случае хорошие результаты может дать отбеливание временного ряда, т.е. вычитание из исходного временного ряда фазовой кривой, полученной для главного периода, и повторение поиска периодичности в уже отбелённом ряду.

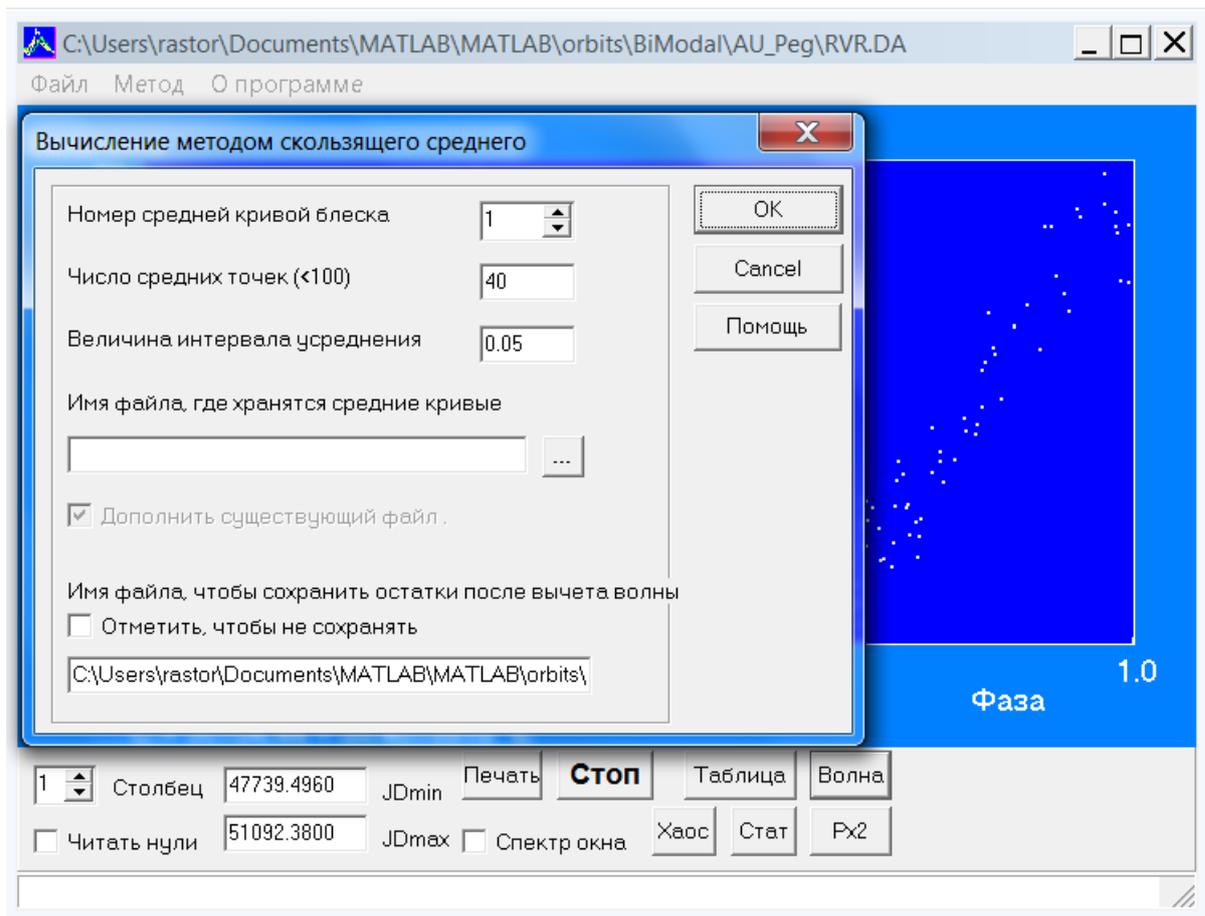
### 3.2.1. Отбеливание временного ряда

Познакомимся с методикой отбеливания временного ряда, реализованной в пакете WINEFK.

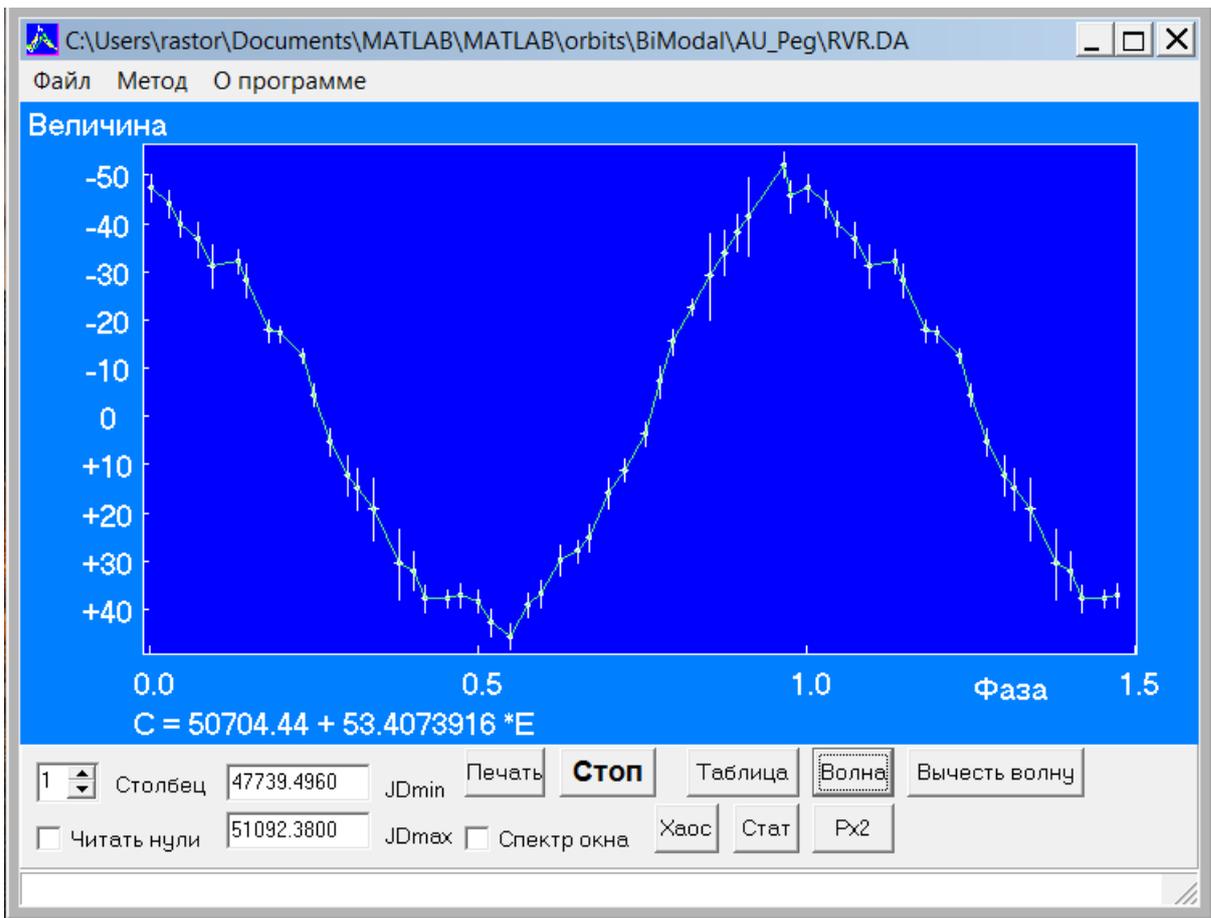
Выведите в окно программы WINEFK фазовую кривую для найденного основного периода:



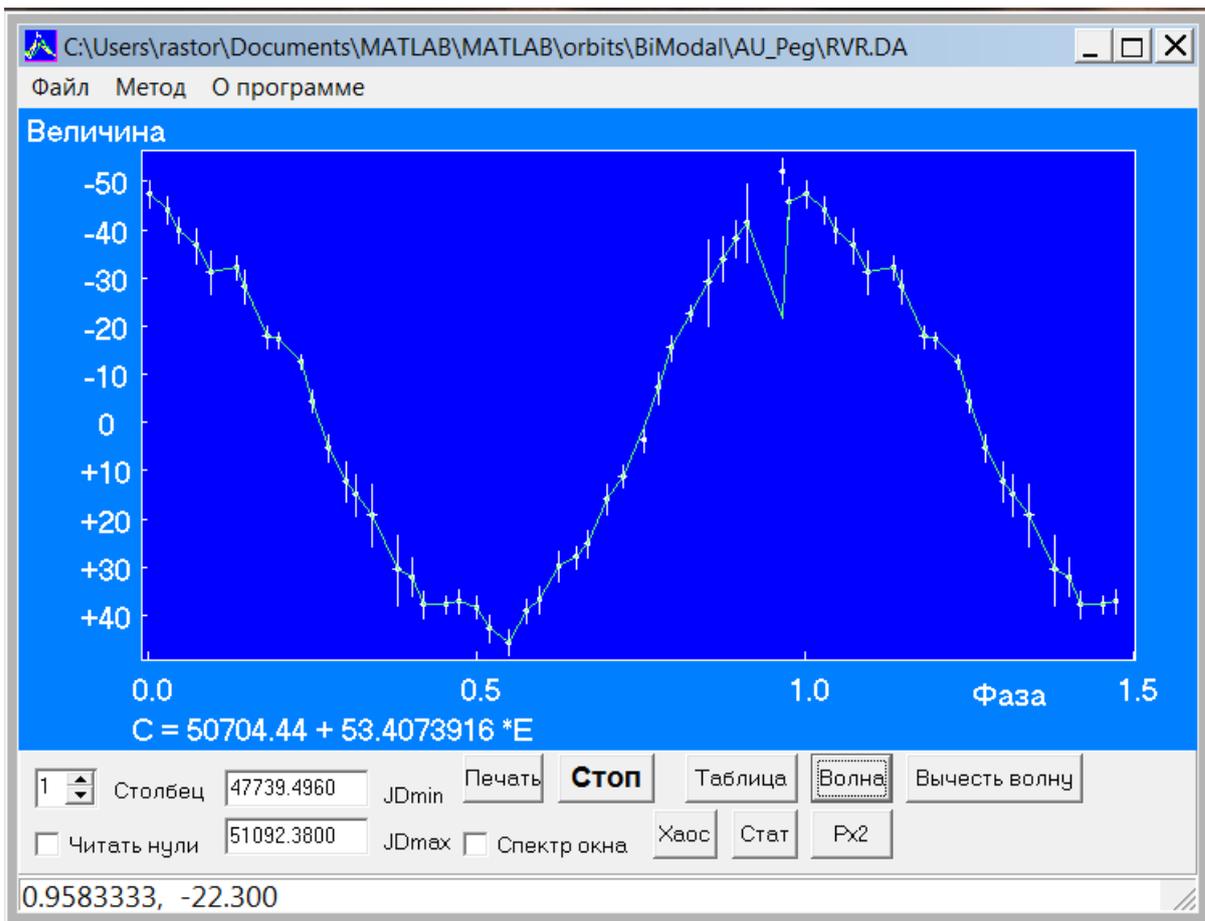
Нажмите на кнопку **Волна**; на экран будет выведено окно установок построения усреднённой фазовой кривой методом скользящего среднего:



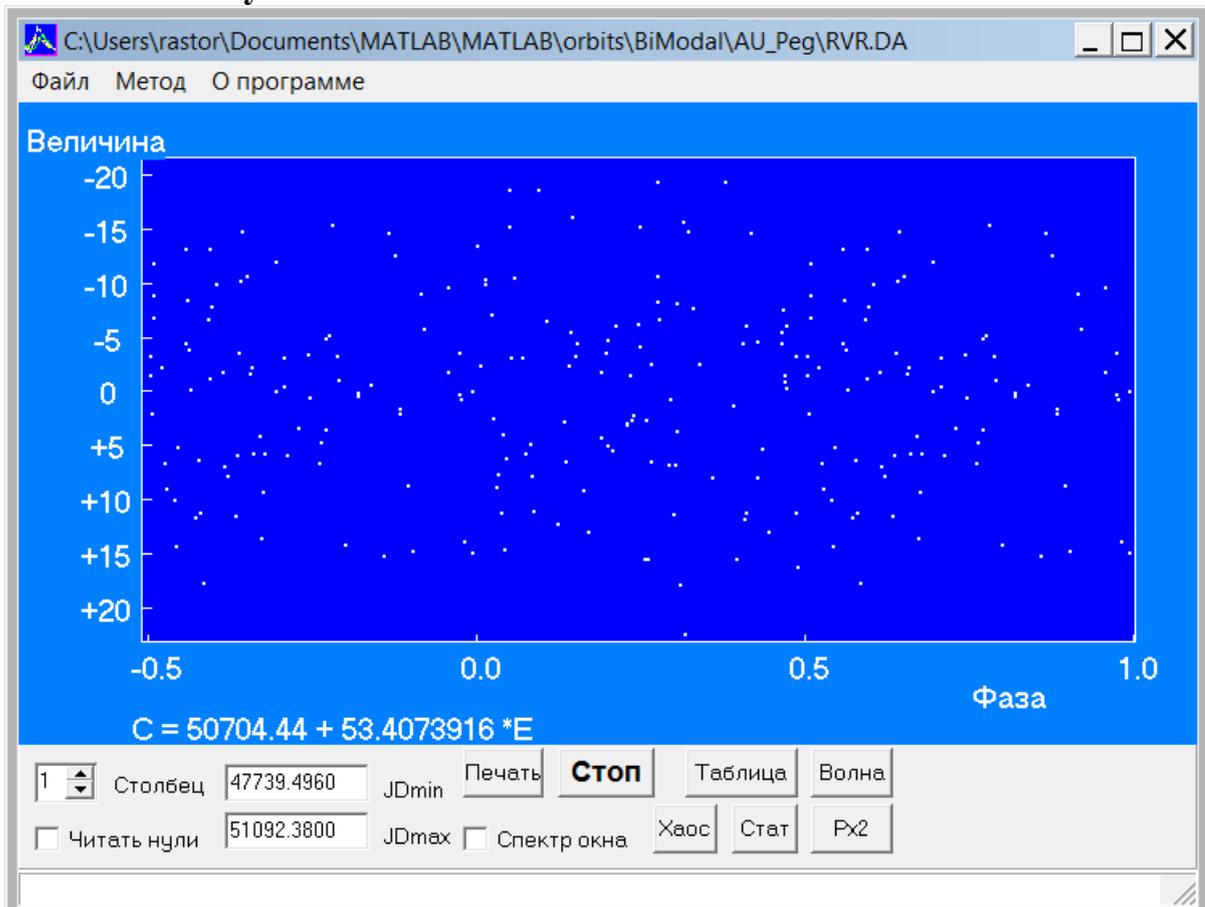
Обязательно укажите (произвольное) имя файла для хранения фазовых кривых (скорее всего, он впоследствии не потребуется, но это обязательное поле в программе). Показанные на предыдущем рисунке параметры заданы по умолчанию, и их можно изменить (рекомендуется попрактиковаться в сглаживании, изменяя эти параметры). Нажатием на кнопку **ОК** можно выдать на экран сглаженную фазовую кривую:



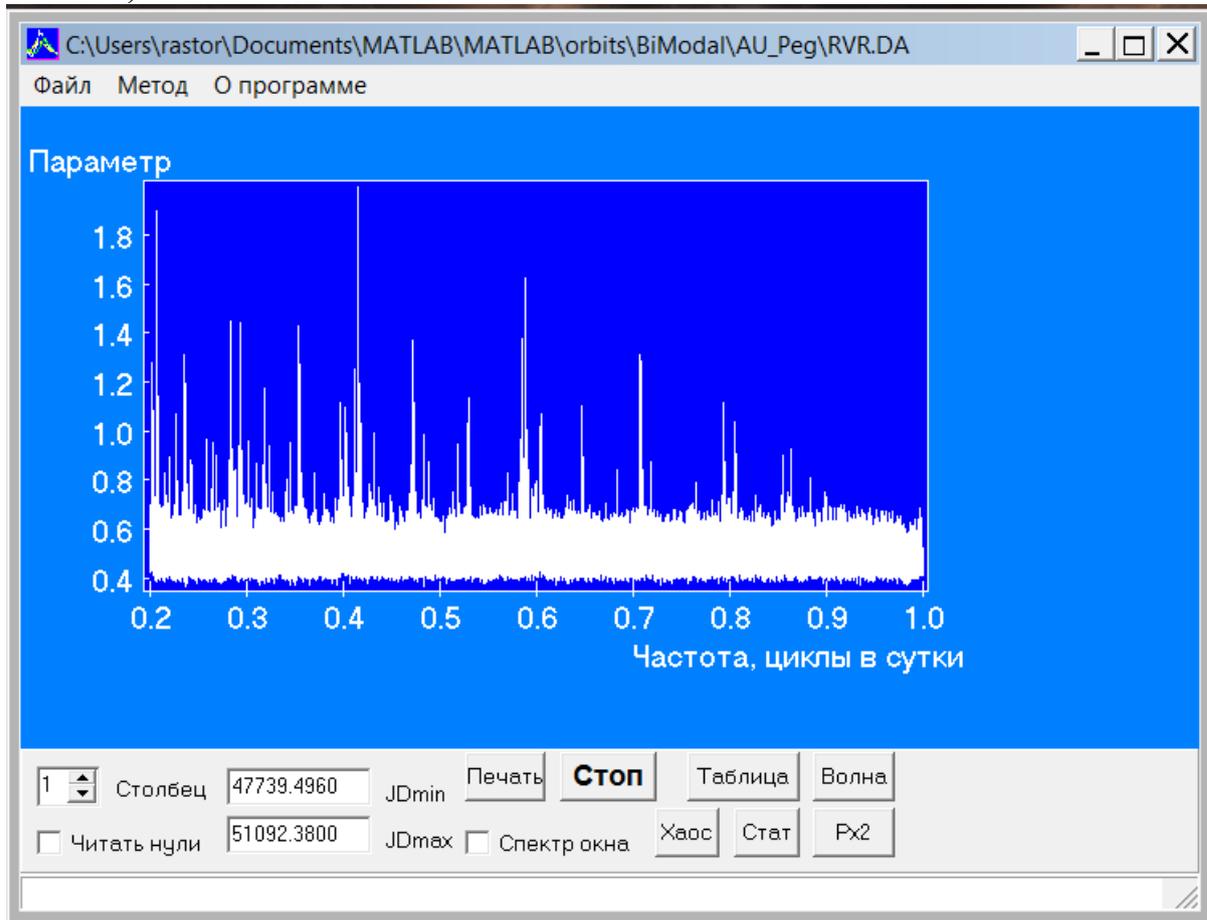
Сглаженную фазовую кривую при необходимости **можно откорректировать в интерактивном режиме**: для этого наведите курсор мышки на нужную точку, нажмите левую клавишу мыши и, не отпуская её, переместите указатель в нужное место, затем отпустите левую клавишу. Средняя фазовая кривая будет изменена:



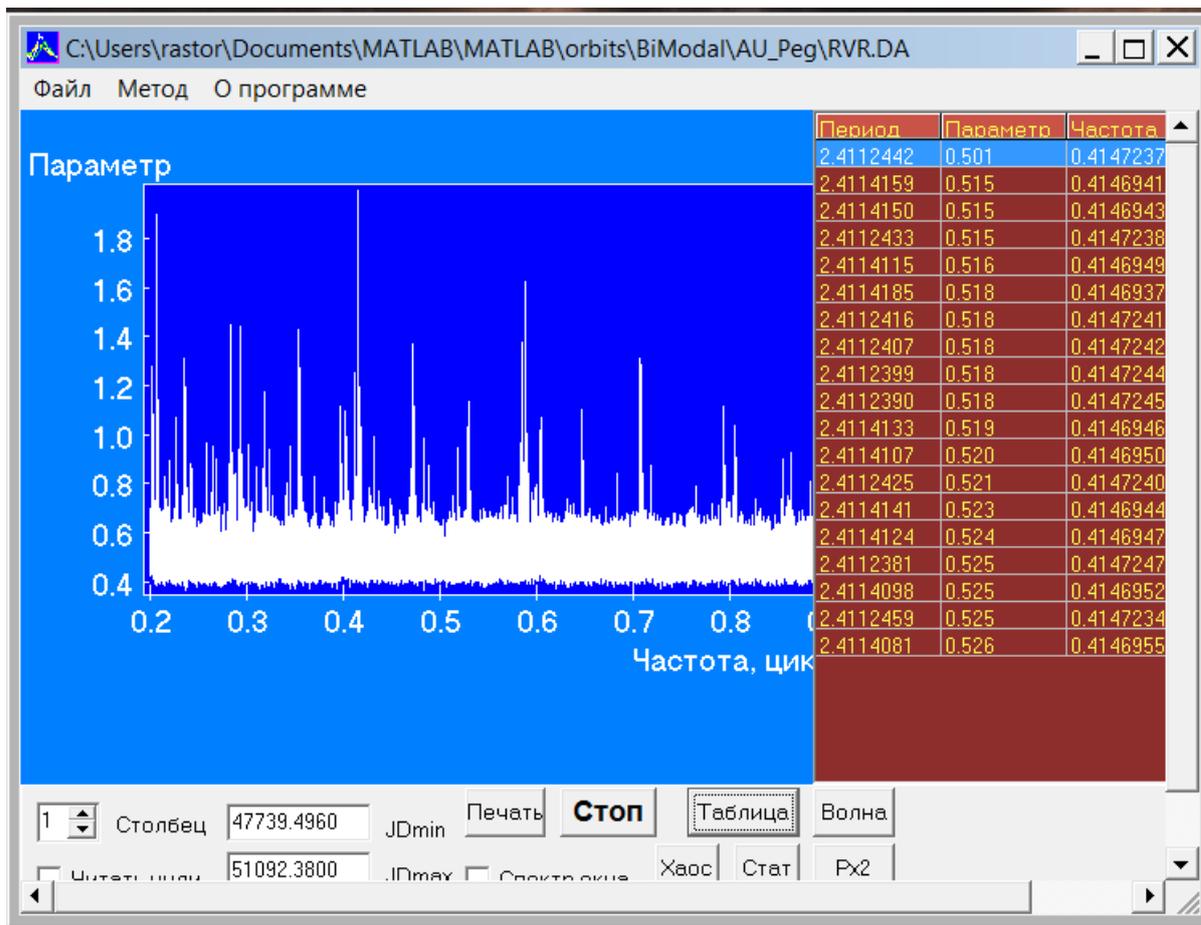
После завершения корректировки фазовой кривой нажмите на кнопку **Вычесть волну**:



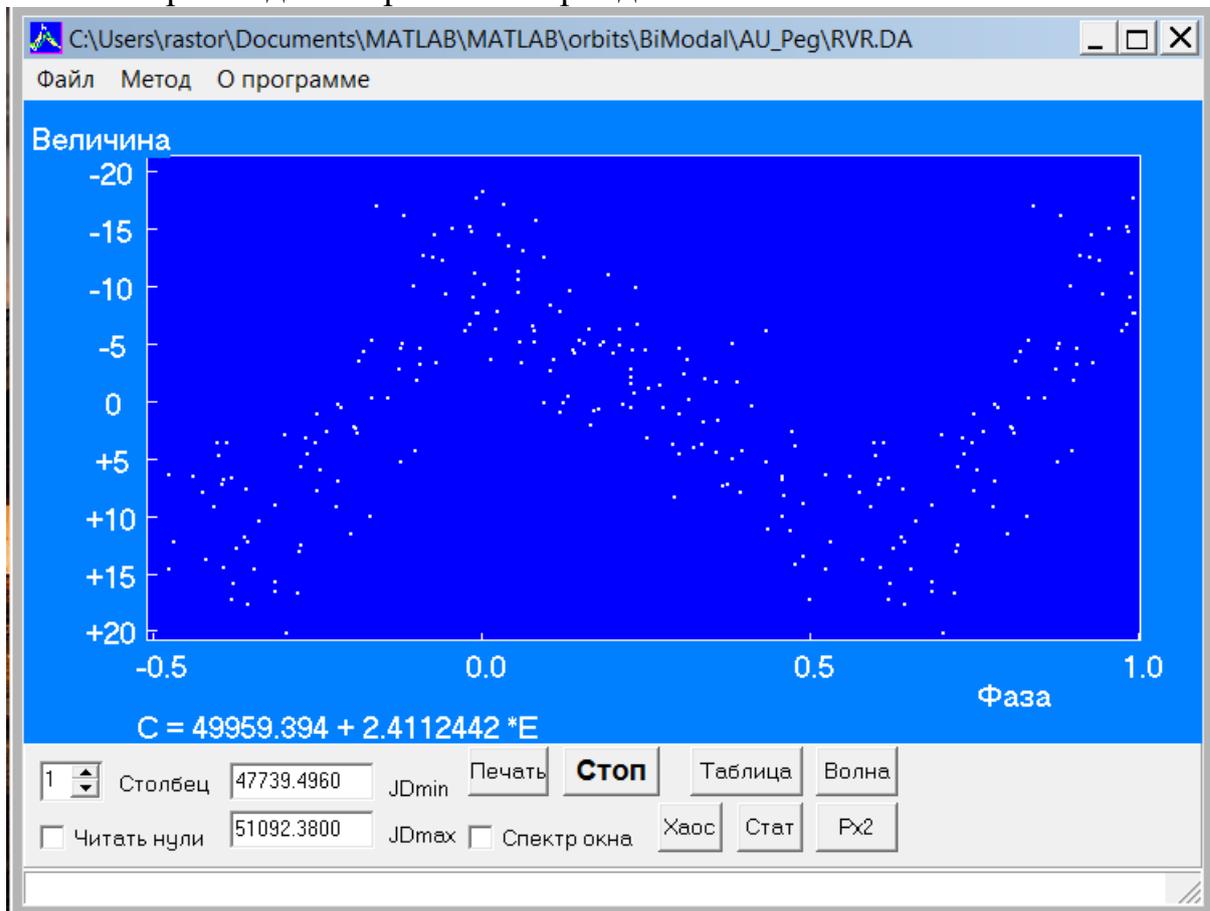
Теперь можно провести поиск вторичной периодичности, снова используя меню **Метод**, выбрав нужный метод и задав новые параметры поиска (максимальное и минимальное значения пробного периода и шаг перебора по частоте):



Нажав на кнопку **Таблица**, выведете на экран табличку с наилучшим значением периода и, выбрав его, выведете на экран фазовую кривую для найденного вторичного периода:



Фазовая кривая для вторичного периода:



#### 4. Сопряжённые периоды, или эффект подмены частот

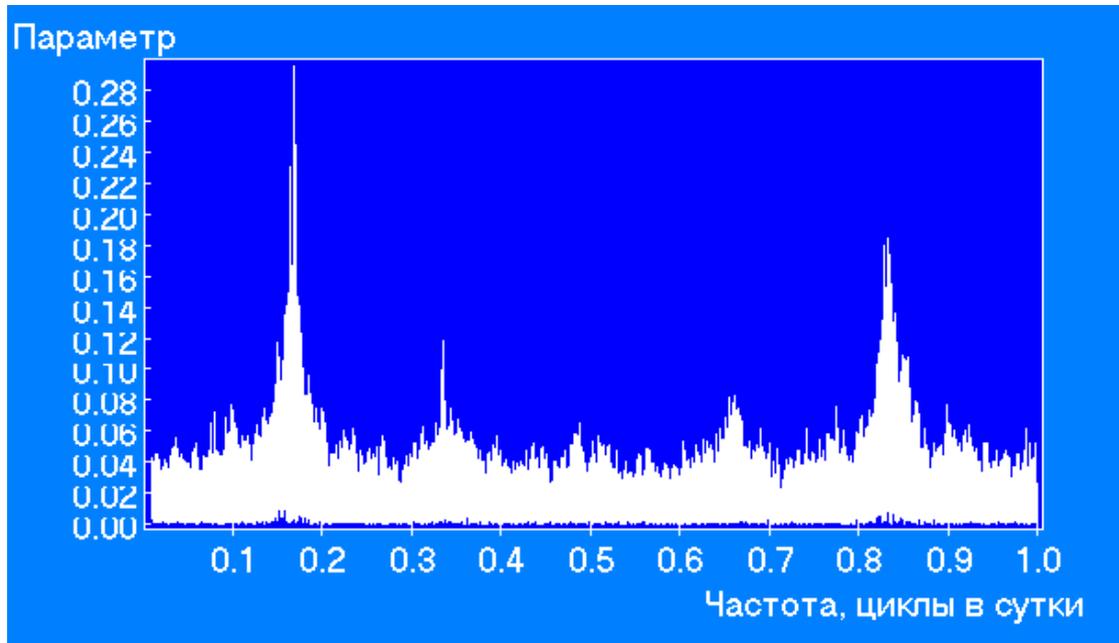
Специфика астрономических наблюдений состоит в том, что на естественную периодичность временного ряда измерений неизбежно накладываются суточные, месячные и годовые периодичности. Непрерывный мониторинг объектов в наземной астрономии практически невозможен. Оптические наблюдения проводятся в течение нескольких ночных часов, а затем повторяются примерно через сутки. Слабые объекты наблюдаются по возможности в безлунное время, следовательно, наилучшие условия для наблюдений повторяются примерно с месячным интервалом. И, конечно же, условия длительной видимости объектов повторяются с годовым интервалом. Таким образом, все эти частоты так или иначе должны искажать исходный частотный спектр ряда измерений и приводить к появлению в рассчитанном спектре сопряжённых периодов.

Причина сопряжённости (подмены частот) довольно прозрачна. В отсутствие непрерывного мониторинга, не имея в распоряжении априорно известного точного периода, наблюдатель за характерный промежуток времени между последовательными сетями измерений (суточный, месячный или годичный) может «просчитаться» в числе периодов (как в большую, так и в меньшую сторону). Это означает, что в спектре частот могут появиться паразитные компоненты, которые называют сопряжёнными. Несложно сообразить, что для почти синусоидального колебания сопряжённые частоты связаны с основной частотой  $\omega_0$  соотношением  $\omega_l = \frac{l}{\Delta T} \pm \omega_0$ , где  $\Delta T$  – интервал дискретизации (суточный, месячный и годичный), а  $l$  – целое число («просчитанных» периодов). Таким образом, реальные пики на периодограмме могут быть окружены симметрично расположенными пиками меньшей амплитуды, соответствующими сопряжённым частотам. Бывает, что из-за неизбежного наличия «шумов», вызванных большими ошибками измерений или малой амплитудой переменности сигнала, сопряжённые частоты выражены даже лучше основной. Нередко их принимают за проявление реальной периодичности и вместо правильной фазовой кривой анализируют «сопряжённую», что приводит к принципиальным ошибкам. По этой причине рекомендуется всегда проверять найденные периоды на сопряжённость путём построения ряда фазовых кривых для разных частот. Что касается исследования переменных звёзд, то во многих случаях удаётся разобраться с проблемой, зная характерные для некоторых типов переменных звёзд и соответствующего значения периода формы кривых блеска.

Если форма периодического сигнала заметно несинусоидальна, т.е. содержит гармоники, кратные основной, каждая из этих гармоник может иметь свой набор сопряжённых частот, и структура периодограммы усложняется. В самом общем случае сопряжённые частоты  $\omega_{nl}$  связаны с

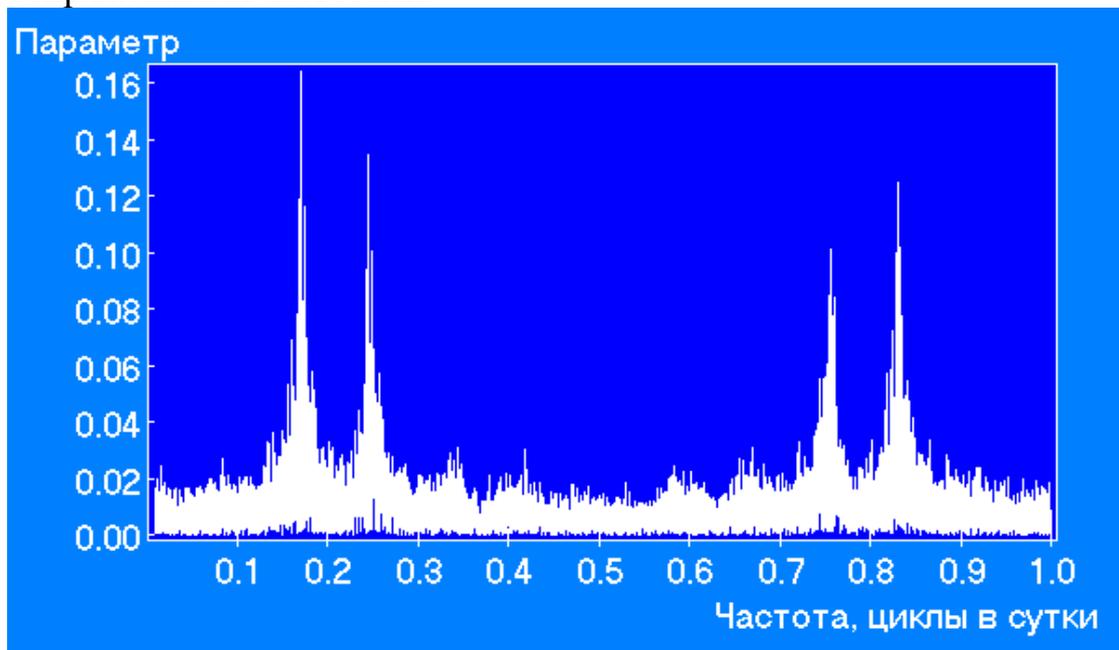
основной частотой  $\omega_0$  более сложным соотношением, которое включает два произвольных целых числа  $n$  и  $l$ :  $\omega_{nl} = \pm n \cdot \omega_0 \pm \frac{l}{\Delta T}$ .

**Пример #1.** Периодограмма для цефеиды MW Cyg с сопряжёнными частотами:



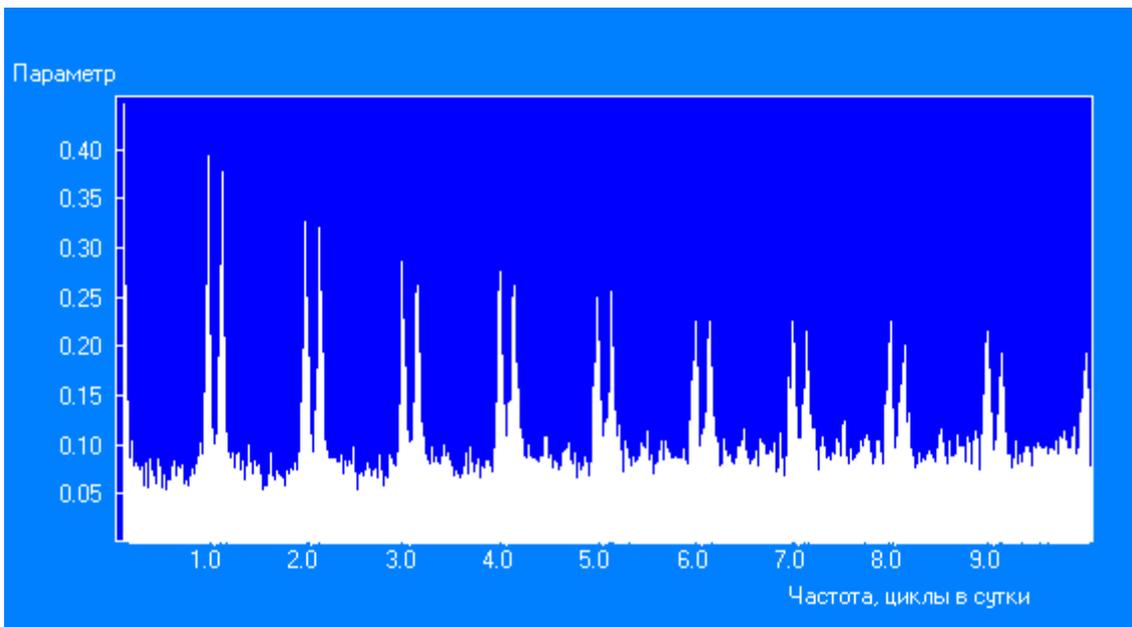
Левый пик (частота 0.168, основной период 5.954 сут.), правый пик (частота 0.831) соответствует суточно-сопряжённому периоду для  $\Delta T = 1$  сут., т.к.  $0.168 + 0.831 \approx 1.0$ .

**Пример #2.** Периодограмма для бимодальной цефеиды EW Sct с сопряжёнными частотами:



Два крайних пика, как и два внутренних пика – суточно-сопряжённые; суммы частот  $\approx 1$ .

**Пример #3.** Периодограмма 13цефеиды TT Aql с сопряжёнными частотами:



Слева виден пик периодограммы, соответствующий основному периоду  $P_0 = 13.75576$  суток. «Спаренные» пики – сопряжённые частоты  $\omega_l = l \pm \omega_0$ , где  $l = 1, 2, 3, \dots, 9, 10$ .

## 5. Порядок выполнения задачи

- (1) Сформировать ряд измерений для использования в программе WINEFK. Для практической работы используются ряды фотометрических и спектральных (лучевые скорости) наблюдений классических цефеид:
  - AU Peg, MW Cyg, S Sge, SU Cyg** – двойные цефеиды, у которых изменения лучевой скорости вызываются как пульсациями, так и орбитальным движением;
  - EW Sct, TU Cas, V367 Sct** – бимодальные цефеиды, у которых изменения блеска и лучевых скоростей вызываются пульсациями одновременно в основном тоне и первом оберitone;
  - TT Aql** – одиночная яркая цефеида, в спектре частот которой описанными выше методами можно обнаружить суточно- и годично-сопряжённую периодичность.
- (2) Построить периодограммы методами Лафлера-Кинмана и Диминга и фазовые диаграммы (кривые блеска или кривые изменения лучевых скоростей) для наилучших периодов. Рекомендуется искать периодичность вначале в большом интервале периодов, затем уточнить значения периодов, проведя вычисление периодограммы в узком интервале возможных значений. Следует обращать внимание на принятое значение шага по частоте: чем больше пробный период, тем меньше должен быть шаг.
- (3) Отыскать вторичные периоды методом отбеливания ряда и построить фазовые кривые для основного и вторичного периодов. Для бимодальных

переменных определить отношение периодов. Для двойных цефеид лучше использовать оценку пульсационного периода, сделанную по фотометрическому ряду.

## **6. Литература**

- [1] Теребиж В.Ю. «Анализ временных рядов в астрофизике» (М.: «Наука», 390 с., 1992; УДК 524.314)
- [2] Deeming T.J. Fourier Analysis with Unequally-Spaced Data. *Ap&SS*, V.36, pp.137-158, 1975)
- [3] Lafler J., Kinman T.D. *ApJ Suppl.*, V.11, p.216, 1965)
- [4] Whittaker E., Robinson G. *The calculus of observations*, London: Blackies, 1924
- [5] Jurkevich I., *Ap&SS*, V.13, p.154, 1971
- [6] Warner B., Robinson E.L., *MNRAS*, V.159, p.101, 1972
- [7] Stellingwerf R.F., *ApJ*, V.224, p.953, 1978

## **7. Контрольные вопросы**

1. Может ли найденный период быть кратным истинному ? Как будет при этом выглядеть фазовая кривая ?
2. Как отличить вторичную периодичность бимодальных переменных звёзд от периодичности, вызванной сопряжённостью периодов ?