

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ



На правах рукописи



Д.В. Никончук
ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ГЛАВНЫХ СПУТНИКОВ
УРАНА НА ОСНОВЕ НАБЛЮДЕНИЙ

Специальность – 01.03.01 – Астрометрия и небесная механика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических
наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
Н.В. Емельянов

Москва
2013

Содержание

Введение	3
Глава 1. Обзор предшествующих работ и формулировка новых задач	12
Глава 2. Нелинейная теория вековых возмущений спутников сжатой планеты	17
2.1 Уравнения движения и возмущающая функция	20
2.2 Метод решения системы линейных однородных уравнений	28
2.3 Метод решения нелинейных уравнений	33
2.4 Результаты	40
2.5 Заключение	46
Глава 3. Теория движения спутников Урана на основе наблюдений	47
3.1 Модель движения и метод улучшения орбит	48
3.2 Состав использованных наблюдений	52
3.3 Уточнение параметров и оценки качества эфемерид	62
3.4 Определение орбитального замедления спутников	72
Заключение и выводы	80
Список литературы	84
Приложение	99

Введение

Актуальность и степень разработанности темы. Теории движения планет и спутников необходимы для получения эфемерид небесных тел и проведения космических миссий. Чтобы сделать самые точные эфемериды, нужно уточнить параметры движения по всем имеющимся наблюдениям. Необходимо постоянно уточнять эфемериды при появлении новых порций наблюдений этих небесных тел. Построение теорий движения выполняется путем решения дифференциальных уравнений движения планет и спутников. Для этого применяются как аналитические методы, так и методы численного интегрирования.

Пять главных спутников Урана расположены в следующем порядке по возрастанию расстояния от планеты: Миранда, Ариель, Умбриель, Титания, Оберон. Первыми из них были открыты Титания и Оберон в 1787 году Уильямом Гершелем. Несмотря на тот факт, что два из пяти главных спутников Урана были открыты еще в XVIII веке, теории движения этих спутников появились несколько позже.

В конце восьмидесятых годов прошлого века была построена аналитическая теория движения главных спутников Урана (Laskar, Jacobson, 1987), называемая GUST86, основанная на наблюдениях, выполненных на интервале времени с 1911 по 1986 год, включая наблюдения с космического аппарата Вояджер-2. Взаимное притяжение спутников учитывалось в этой теории классическим методом вековых возмущений Лагранжа-Лапласа, а также добавлением основных короткопериодических возмущений. При этом в уравнения для вековых возмущений были добавлены члены, обусловленные влиянием несферичности планеты. Другие возмущения не учитывались. В разложении возмущающей функции по степеням наклона и эксцентриситета в теории GUST86 были оставлены только главные члены не выше второй степени, обеспечивающие тем самым вычисление линейных возмущений.

Во второй главе нашей работы построена нелинейная теория вековых воз-

мущений спутников сжатой планеты, в которой учтены члены четвертой степени в разложения вековой части возмущающей функции по степеням малых наклонов и эксцентриситетов орбит. Показано, что вековые члены четвертых степеней вносят существенный вклад в эволюцию орбит спутников, прежде всего Миранды, на интервалах порядка ста лет.

После 1986 года было накоплено большое количество новых, в том числе более точных наблюдений главных спутников Урана. Рассогласование теории GUST86 с этими наблюдениями оказалось недопустимо большим. Появилась необходимость построения новой модели движения спутников.

Первая модель движения главных спутников Урана, основанная на численном интегрировании уравнений движения, была опубликована в работе Тейлора (Taylor, 1998). Модель основывалась на наблюдениях, выполненных на небольшом интервале времени с 1977 по 1995 год.

В 2008 году В. Леней (Laineu, 2008) разработал новую модель движения главных спутников Урана. Эта модель построена путем численного интегрирования дифференциальных уравнений движения спутников. В правых частях уравнений учитывались возмущения от следующих факторов: вторая и четвертая зональные гармоники разложения силовой функции притяжения Урана, взаимное притяжение спутников и возмущения от Солнца. Для уточнения своей модели В. Леней использовал наземные наблюдения главных спутников Урана, выполненные с 1948 по 2006 годы, и наблюдения, сделанные с помощью космического аппарата Вояджер-2 в 1985-1986 годах.

В силу свойств орбитального движения спутников точность эфемерид ухудшается с удалением момента эфемерид от момента последнего наблюдения, использованного при создании модели движения спутников. Кроме того известно, что точность эфемерид улучшается при увеличении интервала времени наблюдений, на которых они основаны (Emelyanov, 2010). Для главных спутников Урана повышения точности эфемерид можно добиться путем использования

всех доступных наблюдений, включая те, которые были выполнены в прошлых веках, с подходящим подбором весов наблюдений в процедуре метода наименьших квадратов при уточнении параметров орбит по наблюдениям.

В данной работе мы предлагаем новую модель движения главных спутников Урана, разработанную методом численного интегрирования уравнений движения спутников и основанную на наблюдениях. Преимущество нашей модели по сравнению с результатами предшествующих работ заключается в том, что при улучшении орбит спутников были использованы все доступные на данный момент времени наблюдения спутников Урана, начиная с момента их открытия в 1787 году, до 2008 года, т. е. на интервале более 220 лет. Кроме того, преимущества нашей новой модели обеспечиваются также тем, что мы использовали новые высокоточные астрометрические положения спутников, выведенные из фотометрии взаимных покрытий и затмений главных спутников Урана в 2008 году.

Главные спутники планет вызывают приливы в вязко-упругом теле планеты. Действие таких приливов должно приводить к замедлению орбитального движения. В возмущениях орбитальной долготы должен появляться член, пропорциональный квадрату времени, а большая полуось орбиты должна иметь линейное по времени изменение. Этот эффект может быть обнаружен и исследован только на основе наблюдений. До сих пор никто не определял из наблюдений параметры векового замедления главных спутников Урана. Попытка такого определения сделана в диссертации.

Актуальность работы очевидна, так как существующие теории движения главных спутников Урана требуют уточнения путем использования наблюдений на более широком интервале времени и новых высокоточных наблюдений.

Цель работы заключается в уточнении модели эволюции орбит и построении новой, более точной теории движения главных спутников Урана на основе всех доступных наблюдений.

Достижение указанной выше цели обусловило постановку и последовательное решение следующих **задач**:

- построение нелинейной теории вековых возмущений спутников сжатой планеты, применение данной теории к системе спутников Урана и оценка вклада дополнительных членов четвертой степени вековой части возмущающей функции в эволюцию элементов орбит спутников на больших интервалах времени.
- построение новой модели движения главных спутников Урана с помощью численного интегрирования дифференциальных уравнений движения спутников.
- уточнение параметров движения спутников Урана по всем доступным на данный момент наблюдениям, начиная с момента их открытия, т.е. на интервале в более 220 лет, включая новые высокоточные астрометрические данные, полученные из обработки фотометрических наблюдения взаимных покрытий и затмений спутников.
- изучение и определение негравитационных эффектов в движении системы спутников Урана, попытка численного определения значений коэффициентов диссипации механической энергии спутников Урана на основе имеющихся наблюдений.
- создание новых эфемерид главных спутников Урана, построенных на большем интервале времени, на основе более широкого набора наблюдений, чем это было сделано другими авторами.

Научная новизна диссертационного исследования заключается в следующем.

- Впервые классическая теория вековых возмущений Лагранжа-Лапласа уточнена и усовершенствована путем учета в вековой части возмущающей функции членов четвертой степени относительно эксцентриситетов и наклонов

орбит спутников. Показано, что учет этих членов вносит существенный вклад в эволюцию орбит спутников Урана, прежде всего Миранды, на интервалах порядка ста лет.

- Построена новая теория движения и эфемериды главных спутников Урана. Новизна по отношению к существующим теориям заключается в том, новая модель уточнена на основе большего ряда наблюдений на более широком интервале времени, включая более точные наблюдения.
- Впервые определены коэффициенты диссипации механической энергии главных спутников Урана на основе наблюдений. На самом деле спутники приобретают энергию за счет приливов в теле Урана, который вращается быстрее орбитального движения спутников.

Теоретическая значимость диссертационной работы заключается в создании новой теории вековых возмущений в движении спутников планет, которая представляет собой следующий шаг в развитии классических моделей в небесной механике. Теория движения спутников Урана расширена путем включения в модель движения негравитационных эффектов.

Практическая значимость диссертации состоит в создании новых эфемерид главных спутников Урана. Эфемериды являются одновременно результатом и средством исследований, поскольку содержат в себе все знания о динамике спутников, включая все выполненные наблюдения, и служат инструментом для дальнейшего изучения Солнечной системы с помощью наземных наблюдений и исследований с помощью космических межпланетных аппаратов.

В диссертационной работе применялись современные **методы исследований** с максимальным использованием мощной вычислительной техники и совершенных средств программирования. Успех дела в большой степени зависел от мастерства и изобретательности при программировании решения задачи для компьютера. Решение достигнуто путем составления весьма сложных и объ-

емных вычислительных программ. В частности, были оптимально запрограммированы аналитические операции над тригонометрическими рядами, чтобы получить решение за приемлемое время работы компьютера.

На защиту выносятся ряд следующих результатов и положений:

- Новая теория вековых возмущений в задаче о движении системы спутников с учетом их взаимного притяжения и сжатия планеты, построенная путем развития классической теории вековых возмущений Лагранжа-Лапласа. Получены дополнительные члены в вековых возмущениях, повышающие точность этой теории и дающие существенный вклад в модель эволюции орбит главных спутников Урана, прежде всего Миранды, на больших интервалах времени.
- Новая модель движения пяти главных спутников Урана, основанная на всех опубликованных наблюдениях с моментов их открытий до 2008 года. Для спутников Титания и Оберон это период 220 лет, для спутников Ариэль и Умбриэль – 160 лет, для Миранды 60 лет. Для уточнения параметров движения спутников использованы 30139 наблюдений, включая наблюдения с космического аппарата Вояджер-2, а также астрометрические результаты фотометрических наблюдений взаимных покрытий и затмений главных спутников Урана в 2007-2008 годах. Модель построена путем численного интегрирования уравнений движения с учетом всех необходимых возмущений. Среднеквадратичная величина остаточных отклонений наблюдаемых геоцентрических положений спутников от их эфемеридных положений составляет 0.43 сек. дуги. С учетом весовых коэффициентов наблюдений эта величина оказалась равной 0.12 сек. дуги.
- Параметры диссипации механической энергии орбитального движения спутников, полученные из наблюдений. Диссипация может быть вызвана приливами планеты и приливами в телах спутников. Получены приближенные

значения коэффициентов квадратичного по времени изменения орбитальной долготы спутников. Эти значения оказались равными $-(0.64 \pm 0.11) \times 10^{-11}$ рад./сут² для спутника Ариэль, $-(0.08 \pm 0.24) \times 10^{-11}$ рад./сут² для спутника Умбриэль, $-(0.29 \pm 0.09) \times 10^{-11}$ рад./сут² для спутника Титания, $-(0.32 \pm 0.07) \times 10^{-11}$ рад./сут² для спутника Оберон и $-(7.56 \pm 1.15) \times 10^{-11}$ рад./сут² для Миранды. Найденные параметры показывают замедление орбитального движения спутников, что соответствует влиянию приливов в теле Урана, который вращается быстрее спутников.

- Новые эфемериды главных спутников Урана на интервале времени с 1787 по 2031 год, основанные на всех опубликованных наблюдениях с моментов их открытий до 2008 года. Эфемериды включены в сервер эфемерид MULTI-SAT, обеспечивающий доступ к эфемеридам через интернет.

Достоверность результатов и обоснованность выводов в диссертации обеспечивается рядом обстоятельств. Во-первых, для получения наиболее адекватной действительности модели движения и эфемерид главных спутников Урана использовался наиболее полный набор всех выполненных к настоящему времени наблюдений. Во-вторых, результаты подвергались тщательной проверке. Точность численного интегрирования контролировалась двумя различными методами. Интегрирование выполнялось методом Беликова (Belikov, 1993) и методом Эверхарта (Everhart, 1985). Выполнялось также интегрирование вперед и назад по времени. Сравнение результатов показало, что интегрирование выполняется с большим запасом точности по сравнению с точностью современных наблюдений. Точность эфемерид оценивалась путем сравнения моделей, полученных по разным составам наблюдений при различных критериях отбрасывания грубых наблюдений. Точность найденных значений коэффициентов при учете негравитационных эффектов в движении главных спутников Урана также оценивалась сравнением вычислений с различными составами наблюдательного материала. Кроме того, построенные эфемериды сопоставлялись с эфемерида-

ми главных спутников Урана, созданными в предшествующих работах других авторов. Во всех случаях получены реальные оценки точности результатов.

Материалы, представляющие содержание диссертации, опубликованы в следующих **работах**:

- Никончук Д. В. Нелинейная теория вековых возмущений спутников сжатой планеты. Письма в *Астрономический журнал*. 2012. Т. 38. N 12. С. 904-920.
- Emelyanov N. V., Nikonchuk D.V. Ephemerides of the main Uranian satellites. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. Advance Access published October 24, 2013, doi:10.1093/mnras/stt1851.

Апробация работы. Диссертация обсуждена и рекомендована к защите на заседании кафедры небесной механики, астрометрии и гравиметрии физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Основные результаты диссертации докладывались на заседаниях отдела небесной механики ГАИШ, а также в докладе на Всероссийской астрономической конференции «Многоликая Вселенная» (ВАК-2013), проходившей в Санкт-Петербурге (Н.В. Емельянов, Д.В. Никончук, Эфемериды главных спутников Урана).

Личный вклад автора. Разработка новой нелинейной теории вековых возмущений спутников сжатой планеты проводилась автором диссертации. Построение теории движения спутников Урана и уточнение теории по наблюдениям спутников проводилось совместно с научным руководителем, Емельяновым Н.В.

Структура и содержание работы определяется целью и задачами исследования. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения.

В первой главе представлены предшествующие работы по данной тематике. Рассмотрены наиболее значимые теории движения главных спутников Урана. Сформулированы задачи данной работы. Обоснована необходимость решения поставленных задач.

Во второй главе описывается построение новой нелинейной теории вековых возмущений спутников сжатой планеты. Показана значимость результатов.

В третьей главе представлена новая теория движения спутников Урана, построенная методом численного интегрирования дифференциальных уравнений движения спутников и уточненная по всем имеющимся на данный момент времени наблюдениям спутников, начиная с момента их открытия в конце XVIII века, до 2008 года.

В заключении кратко формулируются полученные в диссертации результаты, делаются выводы о значимости результатов.

Работа выполнялась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-02-00294).

Глава 1. Обзор предшествующих работ и формулировка новых задач

Теории движения планет и спутников необходимы для получения эфемерид небесных тел и проведения космических миссий. В задаче о движении главных спутников Урана основная проблема состоит в учете их взаимного притяжения. Возмущения, обусловленные притяжением Солнца, оказываются на несколько порядков меньше, чем возмущения от взаимного притяжения. Влияние нецентральной гравитационного поля планеты также мало и сравнимо со взаимным притяжением спутников только для самого близкого из них. Однако эти малые возмущения тоже нужно учитывать при современной точности наблюдений.

Пять главных спутников Урана расположены в следующем порядке по возрастанию расстояния от планеты: Миранда, Ариель, Умбриель, Титания, Оберон. Первыми из них были открыты Титания и Оберон в 1787 году Уильямом Гершелем.

В конце восьмидесятых годов прошлого века была построена аналитическая теория движения главных спутников Урана (Laskar, 1986; Laskar and Jacobson, 1987), называемая GUST86, основанная на наблюдениях, выполненных на интервале времени с 1911 по 1986 год, включая наблюдения с космического аппарата Вояджер-2. Взаимное притяжение спутников учитывалось в этой теории классическим методом вековых возмущений Лагранжа-Лапласа. При этом в уравнения для вековых возмущений были добавлены члены, обусловленные влиянием несферичности планеты. Учтены короткопериодические возмущения первого порядка и резонансные возмущения второго порядка. Другие возмущающие факторы не учитывались. В разложении возмущающей функции по степеням наклона и эксцентриситета в теории GUST86 были оставлены только члены не выше второй степени, обеспечивающие тем самым вычисление линейных возмущений. Долгое время эфемериды главных спутников Урана GUST86

использовались в эфемеридной службе Jet Propulsion Laboratory (JPL) в США (Giorgini и др., 1996).

Что касается аналитической теории движения главных спутников Урана, то прогресс в точности получения вековых возмущений упирается в необходимость учета в разложении вековой части возмущающей функции членов четвертой степени относительно малых эксцентриситетов и взаимных наклонов орбит. Такие члены получены для задачи взаимных возмущений системы малых тел и опубликованы в статье Ellis, Murray (2000). Результаты воспроизведены также в монографии «Динамика Солнечной системы» (Мюррей, Дермотт, 2009).

Особенность результатов Ellis, Murray (2000) состоит в том, что полученные громоздкие формулы представлены в двух вариантах: для случая, когда возмущающее тело является внешним по отношению к возмущаемому, и для случая внутреннего возмущающего тела. Оба варианта формул необходимы для вывода вековых возмущений в движении главных спутников Урана.

В работе Вашковьяка и др. (2013) выведены формулы, представляющие разложение вековой части возмущающей функции с точностью до четвертых степеней эксцентриситетов и наклонов орбит, независимые от того, каким является возмущающее тело по отношению к возмущаемому, внешним или внутренним. Это дает преимущества при определении вековых возмущений элементов орбит спутников. Еще одно преимущество такого подхода состоит в том, что слагаемые вековой части, содержащие четвертые степени эксцентриситетов и наклонов орбиты только возмущающего тела, не требуются, поскольку после подстановки возмущающей функции в уравнения в элементах эти слагаемые пропадают при ее дифференцировании. Это обстоятельство несколько сокращает объем формул. К сожалению, результаты работы Вашковьяка и др. (2013) появились чуть позже того, как мы уже получили наше решение задачи, и мы не использовали указанные преимущества этих результатов.

Попытки построения новой, более точной аналитической теории спутни-

ков Урана делались в работах Malhotra et al. (1989), Christou, Murray (1997) и Varfolomeev (2008). Однако в этих работах вековая часть возмущающей функции бралась с точностью до квадратов малых эксцентриситетов и наклонов орбит спутников, как и в классических работах Лагранжа и Лапласа.

Попытки разных авторов построить полностью аналитическую теорию движения главных спутников Урана с точностью, соответствующей современным наблюдениям, к настоящему времени так и не завершены. В теории Laskar, Jacobson (1987), чтобы наилучшим образом согласовать теорию с наблюдениями, авторы были вынуждены выполнить эмпирическое определение собственных частот матрицы коэффициентов уравнений для вековых возмущений.

В первой главе диссертации изложена построенная нами новая теория вековых возмущений движения спутников сжатой планеты, в которой учитываются члены четвертой степени относительно малых эксцентриситетов и наклонов орбит. Тем самым классическая теория вековых возмущений Лагранжа-Лапласа существенно уточнена. Эти результаты ценны и полезны для будущих построений аналитической теории движения спутников и изучения эволюции орбит. В наших дальнейших построениях мы непосредственно не использовали новую теорию вековых возмущений.

После 1986 года было накоплено большое количество новых, в том числе более точных наблюдений главных спутников Урана. Рассогласование теории GUST86 с этими наблюдениями оказалось недопустимо большим.

Первая модель движения главных спутников Урана, основанная на численном интегрировании уравнений движения, была опубликована в работе Тейлора (Taylor, 1998). Модель основывалась на наблюдениях, выполненных на небольшом интервале времени с 1977 по 1995 год.

В 2008 году Lainey (2008) разработал новую модель движения главных спутников Урана. Эта модель построена путем численного интегрирования дифференциальных уравнений движения спутников. В правых частях уравнений

учитывались возмущения от следующих факторов: вторая и четвертая зональные гармоники разложения силовой функции притяжения Урана, взаимное притяжение спутников и возмущения от Солнца. Для уточнения своей модели Lainey (2008) использовал наземные наблюдения главных спутников Урана, выполненные с 1948 по 2006 годы, и наблюдения, сделанные с помощью космического аппарата Вояджер-2 в 1985-1986 годах.

Эфемериды главных спутников Урана, построенные в работе (Lainey, 2008) для интервала времени 1995-2015 гг., помещены в службу естественных спутников планет MULTI-SAT (Emel'yanov, Arlot, 2008) и доступны через интернет.

Эфемериды главных спутников Урана разработаны также на основе численного интегрирования уравнений движения в JPL (Rush, Jacobson, 2007) на основе наземных наблюдений, выполненных с 1911 по 2006 год, и наблюдений с космического аппарата Вояджер-2. Эти эфемериды включены в сервер эфемерид HORIZONS, разработанный JPL (Giorgini и др., 1996).

В силу свойств орбитального движения спутников точность эфемерид ухудшается с удалением момента эфемерид от момента последнего наблюдения, использованного при создании модели движения спутников. Кроме того известно, что точность эфемерид улучшается при увеличении интервала времени наблюдений, на которых они основаны (Emel'yanov, 2010). Для главных спутников Урана повышения точности эфемерид можно добиться путем использования всех доступных наблюдений, включая те, которые были выполнены в прошлых веках, с подходящим подбором весов наблюдений в процедуре метода наименьших квадратов при уточнении параметров орбит по наблюдениям.

В предшествующих работах по построению теории движения и эфемерид главных спутников Урана не использовались многочисленные микрометрические наблюдения спутников, выполненные в период с 1787 по 1911 годы.. Добавление этих наблюдений существенно расширяет интервал времени наблюдений.

В 2007-2008 годах происходили редкие явления – взаимные покрытия и

затмения главных спутников Урана. Была организована международная кампания фотометрических наблюдений этих явлений. Из обработки фотометрических наблюдений явлений были получены астрометрические данные – разности координат двух спутников, участвующих в каждом явлении. Астрометрическая точность этих данных превосходит точность обычных астрометрических наблюдений в несколько раз. Несмотря на то, что такие наблюдения не многочисленны, определены всего 32 взаимных положения спутников, их использование может улучшить точность создаваемых новых эфемерид.

В третьей главе мы предлагаем новую модель движения главных спутников Урана, разработанную методом численного интегрирования уравнений движения спутников и основанную на наблюдениях. Главное отличие нашей модели от результатов предшествующих работ заключается в том, что при улучшении орбит спутников были использованы все доступные на данный момент времени наблюдения спутников Урана, начиная с момента их открытия в 1787 году, до 2008 года, т. е. на интервале более 220 лет.

Глава 2. Нелинейная теория вековых возмущений спутников сжатой планеты

Аналитические теории движения планет и спутников необходимы для построения картины эволюции Солнечной системы, для получения эфемерид небесных тел и проведения космических миссий. Построение теорий основано на модели возмущенных кеплеровских движений нескольких малых тел вокруг главного притягивающего центра по орбитам с малыми эксцентриситетами и малыми взаимными наклонами. В задачах о движении главных спутников Юпитера, Сатурна и Урана основная проблема состоит в учете взаимного притяжения малых тел. Возмущения обусловленные притяжением Солнца, оказываются на несколько порядков меньше. Влияние нецентральности гравитационного поля планеты сравнимо со взаимным притяжением спутников только для самого близкого из пяти главных спутников Урана. Это влияние для всех спутников легко учесть в рамках рассматриваемой модели, и мы это делаем.

Большой интерес представляют вековые возмущения элементов орбит. Теория вековых возмущений описывает эволюцию орбит на больших интервалах времени и служит нулевым приближением при построении более точных теорий движения планет и спутников. Вековые возмущения получаются в первую очередь из вековой части разложения возмущающей функции, не зависящей от средних долгот тел. При аналитических исследованиях вековых возмущений предполагают отсутствие соизмеримостей низших порядков средних движений спутников.

Классики небесной механики Лагранж и Лаплас построили теорию возмущений на основе вековой части возмущающей функции. В этой теории не используется факт малости масс тел по сравнению с массой центрального притягивающего центра. Платой за такое обобщение оказалась необходимость разложения возмущающей функции по степеням малых эксцентриситетов и ма-

лых взаимных наклонов орбит. Пришлось отбросить члены четвертой и более высоких степеней. Для полученных таким образом уравнений движения для больших планет Лагранж и Лаплас нашли точное решение. В этом решении эксцентриситеты и наклоны орбит остаются малыми на бесконечном интервале времени.

Следует заметить, что вековые возмущения элементов орбит спутников, обусловленные взаимным притяжением, появляются также при нахождении короткопериодических возмущений второго порядка относительно масс спутников. В классической теории и в нашей работе эти возмущения не рассматриваются.

Так же как и в классической теории Лапласа – Лагранжа, мы используем элементы Лагранжа. Разложение вековой части возмущающей функции ведется по степеням этих элементов. Очевидно, что учет членов четвертой степени этих элементов, в отличие от теории Лапласа – Лагранжа, приводит к необходимости решать нелинейные дифференциальные уравнения. Заметим, что в рассматриваемой задаче наклоны орбит обычно отсчитываются от некоторой плоскости, относительно которой эти наклоны малы. В качестве такой плоскости в данной задаче берется плоскость экватора планеты, вблизи которой расположены плоскости орбит спутников.

Система координат для описания движения спутника используется планетоцентрическая, основная плоскость – экватор планеты. Согласно решению Рабочей группы по картографическим координатам и элементам вращения Международного астрономического союза (Archinal, 2011) направлением северного полюса планеты считается то, которое составляет острый угол с направлением на северный полюс эклиптики. В случае Урана это направление имеет отрицательное склонение, а вращение планеты и орбитальное движение главных спутников в такой системе координат оказываются обратными. В отличие от такой системы для удобства описания движения спутников с помощью привычных

формулы и параметров мы задаем движение спутников в планетоэквиаториальной системе координат с положительным направлением оси z , совпадающим с направлением южного полюса Урана. Ось x направлена в восходящий узел основной плоскости этой системы координат по отношению к геоэквиаториальной системе координат. В этом случае долготы главных спутников отсчитываются от оси x и возрастают во времени.

Учет членов четвертой степени относительно малых эксцентриситетов и наклонов орбит спутников в разложении возмущающей функции приводит к необходимости решать нелинейные дифференциальные уравнения. Метод решения основан на последовательных приближениях. В итоге процесс решения состоит из многочисленных операций с отрезками тригонометрических рядов, содержащих сотни членов. Перемножение таких рядов приводит к громоздким вычислениям. Для их реализации на компьютере необходимо оптимально выбрать средства программирования. Мы не использовали специальных средств компьютерной алгебры, а программировали решение задачи на стандартном языке программирования Си. Такой подход в данной задаче оказался эффективным.

Итак, в диссертации поставлена задача определения дополнительных вековых возмущений в элементах орбит главных спутников Урана по сравнению с классической теорией.

2.1 Уравнения движения и возмущающая функция

Возьмем уравнения движения спутников относительно элементов Лагранжа

$$a, \quad \lambda = M + \pi, \quad h = e \sin \pi, \quad k = e \cos \pi, \quad p = \sin \frac{I}{2} \sin \Omega, \quad q = \sin \frac{I}{2} \cos \Omega,$$

где $\pi = \omega + \Omega$, a — большая полуось, M — средняя аномалия, e — эксцентриситет, I — наклон, ω — угловое расстояние перицетра от узла, Ω — долгота узла. Помимо этих элементов рассмотрим также среднюю долготу $\lambda = \omega + \Omega + M$, где M — средняя аномалия. Эти элементы относятся к любому из спутников, индекс, обозначающий номер спутника, мы пока опускаем.

В теории вековых возмущений берется только вековая часть возмущающей функции. Тогда большие полуоси оказываются постоянными, а возмущенное значение средней долготы находится простым интегрированием после того, как найдены возмущения для остальных четырех элементов. Поэтому достаточно решать уравнения относительно элементов h, k, p, q . Кроме того, возмущающую функцию мы берем в виде разложения по степеням малых эксцентриситетов и наклонов. Разложение вековой части получается только по четным суммарным степеням этих малых параметров. В теории Лапласа — Лагранжа в этом разложении берутся только члены второго порядка. Мы оставляем в возмущающей функции также члены четвертой степени относительно малых эксцентриситетов и наклонов. С учетом такой точности относительно малых параметров уравнения Лагранжа для элементов h, k, p, q можно записать в виде

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{na^2} \left\{ \left[1 - \frac{1}{2}(h^2 + k^2) \right] \frac{\partial R}{\partial k} + \frac{1}{2}k \left(p \frac{\partial R}{\partial p} + q \frac{\partial R}{\partial q} \right) \right\},$$

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{1}{na^2} \left\{ \left[1 - \frac{1}{2}(h^2 + k^2) \right] \frac{\partial R}{\partial h} + \frac{1}{2}h \left(p \frac{\partial R}{\partial p} + q \frac{\partial R}{\partial q} \right) \right\},$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{2na^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2}(h^2 + k^2) \right] \frac{\partial R}{\partial q} - p \left(k \frac{\partial R}{\partial h} - h \frac{\partial R}{\partial k} \right) \right\},$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{2na^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2}(h^2 + k^2) \right] \frac{\partial R}{\partial p} + q \left(k \frac{\partial R}{\partial h} - h \frac{\partial R}{\partial k} \right) \right\},$$

где под R подразумевается возмущающая функция.

Мы изучаем движение нескольких спутников в количестве n под действием их взаимного притяжения и несферичности планеты. В уравнениях движения для каждого спутника с номером i возмущающая функция R_i выражается суммой возмущающих функций, т. е.

$$R_i = \sum_{j=1}^n R_{ij},$$

где каждое слагаемое R_{ij} при $j \neq i$ обусловлено притяжением спутника с номером j , а слагаемое R_{ii} - несферичностью планеты.

Для выражения слагаемых возмущающей функции, обусловленных взаимным притяжением спутников, воспользуемся формулами, полученными в работе Ellis, Murray (2000) и опубликованными также в книге Мюррея, Дермотта (2009). Нам нужна только та часть возмущающей функции, которая обозначена в этих публикациях через R_D . В каждой паре спутников элементы, относящиеся к внешнему спутнику, отмечены штрихом, а элементы, относящиеся к внутреннему спутнику, обозначены без штриха, независимо от того, какой из спутников является возмущаемым, а какой - возмущающим. Тогда возмущающая функция, обусловленная влиянием внешнего спутника на внутренний, выражается в виде

$$R = \frac{\mu'}{a'} D(a, a', h, h', k, k', p, p', q, q'),$$

а возмущающая функция, обусловленная влиянием внутреннего спутника на внешний, в виде

$$R = \frac{\mu}{a'} D(a, a', h, h', k, k', p, p', q, q'),$$

где D является однозначно заданной функцией своих аргументов в случае вековых возмущений.

В случае возмущений от несферичности планеты возмущающую функцию R_{ii} удобно представить в виде

$$R_{ii} = \frac{\mu_0}{a_i} J(a_i, h_i, k_i, p_i, q_i) ,$$

где $J(a_i, h_i, k_i, p_i, q_i)$ — некоторая известная функция от своих аргументов, $\mu_0 = Gm_0$, G — универсальная гравитационная постоянная, а m_0 — масса планеты.

Возмущающая функция входит в уравнения движения только под знаком производной по элементам Лагранжа. Поэтому нам нужны обозначения для частных производных от функций $D(\dots)$, $J(\dots)$ по одному из своих аргументов. Пусть $D_l(\dots)$ есть частная производная от $D(\dots)$ по аргументу номер l , если аргументы пронумерованы в таком порядке $h_j, h_i, k_j, k_i, p_j, p_i, q_j, q_i$, а $J_l(\dots)$ есть частная производная от $J(\dots)$ по аргументу номер l в списке h_i, k_i, p_i, q_i .

Поскольку мы оставляем в возмущающей функции члены второй и четвертой степени относительно элементов $h_j, h_i, k_j, k_i, p_j, p_i, q_j, q_i$, удобно обозначить в рассматриваемых функциях отдельно совокупности слагаемых второй и четвертой степеней. Поэтому положим

$$D(\dots) = D^{(2)}(\dots) + D^{(4)}(\dots) , \quad J(\dots) = J^{(2)}(\dots) + J^{(4)}(\dots) ,$$

где верхний индекс в скобках обозначает суммарную степень элементов. Соответственно будем иметь

$$D_l(\dots) = D_l^{(1)}(\dots) + D_l^{(3)}(\dots) , \quad J_l(\dots) = J_l^{(1)}(\dots) + J_l^{(3)}(\dots) .$$

Обозначим через μ_{0i} , μ_i гравитационные параметры, введенные по формулам

$$\mu_{0i} = G(m_0 + m_i) , \quad \mu_i = Gm_i ,$$

где m_i — масса спутника с номером i .

Введем в рассмотрение функции M_{ij} с помощью следующих соотношений:

$$M_{ij} = \begin{cases} \frac{\mu_j}{\mu_{0i}} n_i \frac{a_i}{a_j}, & \text{если } a_i < a_j, \\ \frac{\mu_j}{\mu_{0i}} n_i, & \text{если } a_i > a_j, \\ \frac{\mu_0}{n_i a_i^3} & \text{если } i = j, \end{cases}$$

где n_i определяется из соотношения $n_i^2 a_i^3 = \mu_{0i}$. Введем функции $D_{ij}^{(r)}$ по формуле

$$D_{ij}^{(r)} = \begin{cases} D^{(r)}(a_i, a_j, h_i, h_j, k_i, k_j, p_i, p_j, q_i, q_j), & \text{если } a_i < a_j, \\ D^{(r)}(a_j, a_i, h_j, h_i, k_j, k_i, p_j, p_i, q_j, q_i), & \text{если } a_i > a_j, \\ J^{(r)}(a_i, h_i, k_i, p_i, q_i), & \text{если } i = j, \end{cases}$$

где $r = 2, 4$. Тогда можно записать

$$R_{ij} = n_i a_i^2 M_{ij} (D_{ij}^{(2)} + D_{ij}^{(4)}).$$

Для записи уравнений в форме, удобной для алгоритмизации вычислений, введем в рассмотрение следующие функции:

$$D_{ij}^{(r)h} = \begin{cases} D_1^{(r)}(a_i, a_j, h_i, h_j, k_i, k_j, p_i, p_j, q_i, q_j), & \text{если } a_i < a_j, \\ D_2^{(r)}(a_j, a_i, h_j, h_i, k_j, k_i, p_j, p_i, q_j, q_i), & \text{если } a_i > a_j, \\ J_1^{(r)}(a_i, h_i, k_i, p_i, q_i), & \text{если } i = j, \end{cases}$$

$$D_{ij}^{(r)k} = \begin{cases} D_3^{(r)}(a_i, a_j, h_i, h_j, k_i, k_j, p_i, p_j, q_i, q_j), & \text{если } a_i < a_j, \\ D_4^{(r)}(a_j, a_i, h_j, h_i, k_j, k_i, p_j, p_i, q_j, q_i), & \text{если } a_i > a_j, \\ J_2^{(r)}(a_i, h_i, k_i, p_i, q_i), & \text{если } i = j, \end{cases}$$

$$D_{ij}^{(r)p} = \begin{cases} D_5^{(r)}(a_i, a_j, h_i, h_j, k_i, k_j, p_i, p_j, q_i, q_j), & \text{если } a_i < a_j, \\ D_6^{(r)}(a_j, a_i, h_j, h_i, k_j, k_i, p_j, p_i, q_j, q_i), & \text{если } a_i > a_j, \\ J_3^{(r)}(a_i, h_i, k_i, p_i, q_i), & \text{если } i = j, \end{cases}$$

$$D_{ij}^{(r)q} = \begin{cases} D_7^{(r)}(a_i, a_j, h_i, h_j, k_i, k_j, p_i, p_j, q_i, q_j), & \text{если } a_i < a_j, \\ D_8^{(r)}(a_j, a_i, h_j, h_i, k_j, k_i, p_j, p_i, q_j, q_i), & \text{если } a_i > a_j, \\ J_4^{(r)}(a_i, h_i, k_i, p_i, q_i), & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Уравнения движения можно представить теперь в следующем виде:

$$\frac{dh_i}{dt} = H_i^{(1)} + H_i^{(3)}, \quad H_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n H_{ij}^{(1)}, \quad H_i^{(3)} = \sum_{j=1}^n H_{ij}^{(3)},$$

$$\frac{dk_i}{dt} = K_i^{(1)} + K_i^{(3)}, \quad K_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n K_{ij}^{(1)}, \quad K_i^{(3)} = \sum_{j=1}^n K_{ij}^{(3)},$$

$$\frac{dp_i}{dt} = P_i^{(1)} + P_i^{(3)}, \quad P_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n P_{ij}^{(1)}, \quad P_i^{(3)} = \sum_{j=1}^n P_{ij}^{(3)},$$

$$\frac{dq_i}{dt} = Q_i^{(1)} + Q_i^{(3)}, \quad Q_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n Q_{ij}^{(1)}, \quad Q_i^{(3)} = \sum_{j=1}^n Q_{ij}^{(3)},$$

где

$$H_{ij}^{(1)} = M_{ij} D_{ij}^{(1)k},$$

$$H_{ij}^{(3)} = M_{ij} \left[D_{ij}^{(3)k} - \frac{1}{2}(h_i^2 + k_i^2) D_{ij}^{(1)k} + \frac{1}{2} k_i p_i D_{ij}^{(1)p} + \frac{1}{2} k_i q_i D_{ij}^{(1)q} \right],$$

$$K_{ij}^{(1)} = -M_{ij} D_{ij}^{(1)h},$$

$$K_{ij}^{(3)} = M_{ij} \left[-D_{ij}^{(3)h} + \frac{1}{2}(h_i^2 + k_i^2)D_{ij}^{(1)h} - \frac{1}{2}h_i p_i D_{ij}^{(1)p} - \frac{1}{2}h_i q_i D_{ij}^{(1)q} \right],$$

$$P_{ij}^{(1)} = M_{ij} \frac{1}{4} D_{ij}^{(1)q},$$

$$P_{ij}^{(3)} = M_{ij} \frac{1}{4} \left[D_{ij}^{(3)q} + \frac{1}{2}(h_i^2 + k_i^2)D_{ij}^{(1)q} - \frac{1}{2}p_i k_i D_{ij}^{(1)h} + \frac{1}{2}p_i h_i D_{ij}^{(1)k} \right],$$

$$Q_{ij}^{(1)} = -M_{ij} \frac{1}{4} D_{ij}^{(1)p},$$

$$Q_{ij}^{(3)} = M_{ij} \frac{1}{4} \left[-D_{ij}^{(3)p} - \frac{1}{2}(h_i^2 + k_i^2)D_{ij}^{(1)p} - \frac{1}{2}q_i k_i D_{ij}^{(1)h} + \frac{1}{2}q_i h_i D_{ij}^{(1)k} \right].$$

Как видно из приведенных здесь формул, если в правых частях пренебречь членами с третьими степенями элементов h, k, p, q по сравнению с членами первой степени, то уравнения движения получатся линейными однородными дифференциальными уравнениями. Включение членов третьей степени делает эти уравнения нелинейными.

Для определения правых частей уравнений как функций от искомым элементов Лагранжа, нужно иметь явное выражение функции $D(a, a', h, h', k, k', p, p', q, q')$. При этом для больших полуосей a, a' могут быть подставлены их численные значения. Для этого можно воспользоваться формулами, приведенными в книге Мюррея, Дермотта (2009). Для удобства последующей алгоритмизации вычислений можно задать функцию $D(\dots)$ в виде

$$D = \sum B f_L h^{N_1}, h'^{N_2}, k^{N_3}, k'^{N_4}, p^{N_5}, p'^{N_6}, q^{N_7}, q'^{N_8},$$

где каждое слагаемое представлено последовательностью целых чисел

$$B, L, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8,$$

а количество слагаемых определяется исходными формулами. Здесь f_L — функции от $\alpha = a/a'$, а L — номер этой функции. Эти функции вычисляются с помощью степенных рядов с использованием так называемых коэффициентов Лапласа. Степени переменных, т. е. числа $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8$ могут принимать значения от 0 до 4.

Функцию D мы разложили на два слагаемых:

$$D = D^{(2)} + D^{(4)} .$$

Тогда в слагаемом $D^{(2)}$ числа $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8$ удовлетворяют соотношению

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7 + N_8 = 2 ,$$

а в слагаемом $D^{(4)}$ — соотношению

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7 + N_8 = 4 .$$

Функции $D_l^{(1)}, D_l^{(3)}$, входящие в правые части уравнений, можно задать аналогичными таблицами, полученными из таблиц для функции $D(\dots)$, в которых B заменяется на $N_l B$, а число N_l — на число $N_l - 1$. При этом сумма чисел $N_1 + N_2 + \dots + N_8$ в слагаемых $D_l^{(1)}$ и $D_l^{(3)}$ равна 1 и 3 соответственно. Нужно учитывать, что если в слагаемом в функции D значение N_l равно нулю, то в функции D_l это слагаемое исчезает.

Выражение для $D^{(2)}$ имеет следующий явный вид:

$$D^{(2)} = f_2(h^2 + k^2 + h'^2 + k'^2) + f_3(p^2 + q^2 + p'^2 + q'^2) + f_{10}(hh' + kk') + f_{14}(pp' + qq') .$$

Для функции $D^{(4)}$ в Приложении дана таблица чисел $B, L, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8$, задающих эту функцию так, как описано выше.

Динамическую несферичность планет обычно описывают с помощью разложения силовой функции притяжения в ряд по сферическим функциям. В случае планеты Уран существенными в этом разложении оказываются только вторая

и четвертая зональные гармоники. Что касается функции $J(a_i, h_i, k_i, p_i, q_i)$, то мы вывели ее в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 J(a, h, k, p, q) = & -J_2 \frac{r_0^2}{a^2} \times \\
 & \times \left[-\frac{1}{2} - \frac{3}{4}(h^2 + k^2) + 3(p^2 + q^2) - \right. \\
 & \left. - \frac{15}{16}(h^2 + k^2)^2 + \frac{9}{2}(h^2 + k^2)(p^2 + q^2) - 3(p^2 + q^2)^2 \right] - \\
 & - J_4 \frac{r_0^4}{a^4} \times \\
 & \times \left[\frac{3}{8} + \frac{15}{8}(h^2 + k^2) - \frac{15}{2}(p^2 + q^2) + \right. \\
 & + \frac{315}{64}(h^2 + k^2)^2 - \frac{75}{2}(h^2 + k^2)(p^2 + q^2) + \\
 & \left. + \frac{135}{4}(p^2 + q^2)^2 + \frac{45}{8}(k^2 - h^2)(p^2 + q^2) \right],
 \end{aligned}$$

где r_0 — экваториальный радиус планеты, J_2, J_4 — коэффициенты при второй и четвертой зональных гармониках разложения силовой функции притяжения планеты.

2.2 Метод решения системы линейных однородных уравнений

Уравнения решаемой здесь задачи оказываются нелинейными. Метод решения таких уравнений включает в себя решение соответствующей системы линейных однородных уравнений. Именно система линейных однородных дифференциальных уравнений берется при определении вековых возмущений методом Лапласа — Лагранжа. Поэтому рассмотрим здесь метод решения системы линейных однородных уравнений. Заметим, что в этом случае уравнения относительно элементов h, k и уравнения относительно элементов p, q решаются независимо. Поэтому рассмотрим здесь только уравнения для элементов h, k . Для элементов p, q уравнения решаются аналогично.

Представим совокупность искомых функций h_i, k_i ($i = 1, 2, \dots, n$) в форме матриц-столбцов

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix}, \quad (1)$$
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}.$$

Уравнения движения тогда можно записать в следующей матричной форме:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad (2)$$

где матрица \mathbf{A} представляет собой блочную матрицу, включающую вспомогательную матрицу \mathbf{A}_1 , т. е.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A}_1 \\ -\mathbf{A}_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где элементы A_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) представляют собой коэффициенты при линейных членах в уравнениях движения. Явные выражения для элементов матрицы \mathbf{A}_1 в случае решения уравнений относительно элементов h, k будут иметь следующий вид:

$$A_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1, k \neq i}^n 2f_2(a_i, a_k)M_{ik} + \frac{3}{2} \left(J_2 \frac{r_0^2}{a_i^2} - \frac{5}{2} J_4 \frac{r_0^4}{a_i^4} \right) M_{ij}, & \text{если } i = j, \\ f_{10}(a_i, a_j)M_{ij}, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Аналогичные выражения для элементов матрицы \mathbf{A}_1 в случае уравнений относительно элементов p, q :

$$A_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{1}{2} f_3(a_i, a_k)M_{ik} - \frac{3}{2} \left(J_2 \frac{r_0^2}{a^2} - \frac{5}{2} J_4 \frac{r_0^4}{a^4} \right) M_{ij}, & \text{если } i = j, \\ \frac{1}{4} f_{14}(a_i, a_j)M_{ij}, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Индексы i и j пробегают значения от 1 до n . В выражениях для элементов матрицы \mathbf{A}_1 присутствуют функции f_2, f_{10}, f_3, f_{14} , зависящие только от отношений больших полуосей спутников. Эти функции выражаются в конечном виде через коэффициенты Лапласа. Коэффициенты Лапласа вычисляются с помощью степенных рядов. Все необходимые для этого формулы можно найти в работах Ellis, Murray (2000) и Мюррея, Дермотта (2009).

Общее решение системы линейных уравнений имеет следующий вид (Субботин, 1968):

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1^{(1)} \sin(g_1 t + \beta_1) & q_2^{(1)} \sin(g_2 t + \beta_2) & \dots & q_n^{(1)} \sin(g_n t + \beta_n) \\ q_1^{(2)} \sin(g_1 t + \beta_1) & q_2^{(2)} \sin(g_2 t + \beta_2) & \dots & q_n^{(2)} \sin(g_n t + \beta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{(n)} \sin(g_1 t + \beta_1) & q_2^{(n)} \sin(g_2 t + \beta_2) & \dots & q_n^{(n)} \sin(g_n t + \beta_n) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1^{(1)} \cos(g_1 t + \beta_1) & q_2^{(1)} \cos(g_2 t + \beta_2) & \dots & q_n^{(1)} \cos(g_n t + \beta_n) \\ q_1^{(2)} \cos(g_1 t + \beta_1) & q_2^{(2)} \cos(g_2 t + \beta_2) & \dots & q_n^{(2)} \cos(g_n t + \beta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{(n)} \cos(g_1 t + \beta_1) & q_2^{(n)} \cos(g_2 t + \beta_2) & \dots & q_n^{(n)} \cos(g_n t + \beta_n) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix},$$

где t — время, g_1, g_2, \dots, g_n — собственные значения матрицы \mathbf{A}_1 , а c_i, β_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — независимые произвольные постоянные. Последовательности чисел $q_1^{(j)}, q_2^{(j)}, \dots, q_n^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) представляют собой собственные векторы матрицы \mathbf{A}_1 , где j — номер собственного вектора.

Для удобства дальнейших выкладок необходимо записать общее решение для объединенного вектора искомых функций \mathbf{X} . Объединяя предыдущие матричные формулы, решение для \mathbf{X} легко представить в виде

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_s \\ \mathbf{N}_c \end{pmatrix} \mathbf{c},$$

где

$$\mathbf{N}_s = \begin{pmatrix} q_1^{(1)} \sin(g_1 t + \beta_1) & q_2^{(1)} \sin(g_2 t + \beta_2) & \dots & q_n^{(1)} \sin(g_n t + \beta_n) \\ q_1^{(2)} \sin(g_1 t + \beta_1) & q_2^{(2)} \sin(g_2 t + \beta_2) & \dots & q_n^{(2)} \sin(g_n t + \beta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{(n)} \sin(g_1 t + \beta_1) & q_2^{(n)} \sin(g_2 t + \beta_2) & \dots & q_n^{(n)} \sin(g_n t + \beta_n) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N}_c = \begin{pmatrix} q_1^{(1)} \cos(g_1 t + \beta_1) & q_2^{(1)} \cos(g_2 t + \beta_2) & \dots & q_n^{(1)} \cos(g_n t + \beta_n) \\ q_1^{(2)} \cos(g_1 t + \beta_1) & q_2^{(2)} \cos(g_2 t + \beta_2) & \dots & q_n^{(2)} \cos(g_n t + \beta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{(n)} \cos(g_1 t + \beta_1) & q_2^{(n)} \cos(g_2 t + \beta_2) & \dots & q_n^{(n)} \cos(g_n t + \beta_n) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Формулы тригонометрии позволяют представить элементы матриц \mathbf{N}_c и \mathbf{N}_s в следующем виде:

$$c_i q_i^{(j)} \sin(g_i t + \beta_i) = c_i q_i^{(j)} \cos \beta_i \sin g_i t + c_i q_i^{(j)} \sin \beta_i \cos g_i t ,$$

$$c_i q_i^{(j)} \cos(g_i t + \beta_i) = c_i q_i^{(j)} \cos \beta_i \cos g_i t - c_i q_i^{(j)} \sin \beta_i \sin g_i t .$$

Подставляя эти выражения в предыдущие формулы, получим окончательное выражение для решения системы линейных уравнений в форме

$$\mathbf{X} = \mathbf{N} \mathbf{C} , \quad (3)$$

где матрица \mathbf{N} имеет следующий вид:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} q_1^{(1)} \sin g_1 t & q_1^{(1)} \cos g_1 t & q_2^{(1)} \sin g_2 t & q_2^{(1)} \cos g_2 t & \dots & q_n^{(1)} \sin g_n t & q_n^{(1)} \cos g_n t \\ q_1^{(2)} \sin g_1 t & q_1^{(2)} \cos g_1 t & q_2^{(2)} \sin g_2 t & q_2^{(2)} \cos g_2 t & \dots & q_n^{(2)} \sin g_n t & q_n^{(2)} \cos g_n t \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{(n)} \sin g_1 t & q_1^{(n)} \cos g_1 t & q_2^{(n)} \sin g_2 t & q_2^{(n)} \cos g_2 t & \dots & q_n^{(n)} \sin g_n t & q_n^{(n)} \cos g_n t \\ q_1^{(1)} \cos g_1 t & -q_1^{(1)} \sin g_1 t & q_2^{(1)} \cos g_2 t & -q_2^{(1)} \sin g_2 t & \dots & q_n^{(1)} \cos g_n t & -q_n^{(1)} \sin g_n t \\ q_1^{(2)} \cos g_1 t & -q_1^{(2)} \sin g_1 t & q_2^{(2)} \cos g_2 t & -q_2^{(2)} \sin g_2 t & \dots & q_n^{(2)} \cos g_n t & -q_n^{(2)} \sin g_n t \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{(n)} \cos g_1 t & -q_1^{(n)} \sin g_1 t & q_2^{(n)} \cos g_2 t & -q_2^{(n)} \sin g_2 t & \dots & q_n^{(n)} \cos g_n t & -q_n^{(n)} \sin g_n t \end{pmatrix} ,$$

а компоненты вектора \mathbf{C} , представляют собой комбинацию произвольных по-

стоянных c_i и β_i ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \cos \beta_1 \\ c_1 \sin \beta_1 \\ c_2 \cos \beta_2 \\ c_2 \sin \beta_2 \\ \dots \\ c_n \cos \beta_n \\ c_n \sin \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_{2n} \end{pmatrix},$$

здесь элементы C_1, C_2, \dots, C_{2n} являются новыми независимыми произвольными постоянными.

Матрица \mathbf{N} называется матрицей фундаментальной системы решений линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами.

Таким образом, нами получено решение системы линейных однородных уравнений относительно элементов h, k , необходимое для дальнейшего решения системы нелинейных уравнений. Система однородных уравнений относительно элементов p, q решается аналогичным образом.

Заметим, что решение содержит собственные значения и собственные векторы матрицы \mathbf{A} . Для вычисления элементов этой матрицы нужны только значения гравитационных параметров и больших полуосей орбит тел. Произвольные постоянные можно найти, если подставить в формулы общего решения начальный момент времени и соответствующие начальные значения элементов $h_i^{(0)}, k_i^{(0)}, p_i^{(0)}, q_i^{(0)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Произвольные постоянные найдутся тогда путем решения системы линейных неоднородных уравнений.

2.3 Метод решения нелинейных уравнений

Рассмотрим теперь, как решать уравнения поставленной задачи. Правые части уравнений содержат члены, линейные по отношению к искомым функциям, и члены третьей степени. Основой метода решения будет предположение, что искомые функции остаются малыми на бесконечном интервале времени. Тогда в правых частях уравнений можно считать члены третьей степени малыми по сравнению с линейными членами. Этот факт будет использован при построении метода решения поставленной задачи.

Представим совокупность искомых функций h_i, k_i, p_i, q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) в форме матриц-столбцов (1), а также

$$\mathbf{X}_{hk} = \begin{pmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_{pq} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}.$$

Уравнения движения теперь можно представить в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{X}_{hk}}{dt} = \mathbf{A}_{hk}\mathbf{X}_{hk} + \mathbf{P}_{hk}(\mathbf{X}_{hk}, \mathbf{X}_{pq}), \quad \frac{d\mathbf{X}_{pq}}{dt} = \mathbf{A}_{pq}\mathbf{X}_{pq} + \mathbf{P}_{pq}(\mathbf{X}_{hk}, \mathbf{X}_{pq}), \quad (4)$$

где $\mathbf{A}_{hk}, \mathbf{A}_{pq}$ — известные постоянные матрицы, а компоненты вектор-столбцов $\mathbf{P}_{hk}(\mathbf{X}_{hk}, \mathbf{X}_{pq}), \mathbf{P}_{pq}(\mathbf{X}_{hk}, \mathbf{X}_{pq})$ суть известные полиномы от искомых функций, содержащие только члены третьей степени.

Наряду с записанными уравнениями движения рассмотрим уравнения вида

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{P}(t), \quad (5)$$

где \mathbf{A} — известная постоянная матрица, а компоненты вектора-столбца $\mathbf{P}(t)$ суть известные функции времени. Общее решение таких неоднородных уравне-

ний известно (Якубович, Старжинский, 1972) в виде

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{N}(t)\mathbf{C} + \mathbf{N}(t) \int_0^t \mathbf{N}^{-1}(\tau)\mathbf{P}(\tau)d\tau, \quad (6)$$

где \mathbf{C} — вектор произвольных постоянных, а $\mathbf{N}(t)$ — матрица фундаментальной системы решений соответствующей системы однородных уравнений (2), так что решение системы однородных уравнений представляется в виде

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{N}(t)\mathbf{C}.$$

В случае матрицы \mathbf{A} , соответствующей нашей задаче, метод построения матрицы $\mathbf{N}(t)$ описан выше.

В уравнениях движения поставленной задачи нелинейные части $\mathbf{P}_{hk}(\mathbf{X}_{hk}, \mathbf{X}_{pq})$, $\mathbf{P}_{pq}(\mathbf{X}_{hk}, \mathbf{X}_{pq})$ не являются известными функциями времени, они зависят от искоемых функций. Чтобы воспользоваться приведенным выше методом решения неоднородных уравнений, будем решать уравнения движения последовательными приближениями, учитывая малость нелинейных частей этих уравнений по сравнению с линейными частями. В качестве нулевого приближения можно взять решение линейных однородных уравнений, получаемых простым отбрасыванием нелинейных членов правых частей. Первое приближение даст нам возмущения в элементах h_i, k_i, p_i, q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) с точностью до третьей степени этих величин включительно. Второе приближение могло бы дать нам члены более высоких степеней, чем третья. Однако, получение второго приближения не повысит точности решения, поскольку мы уже пренебрегли такими членами в исходных уравнениях.

Итак, в первом приближении имеем

$$\frac{d\mathbf{X}_{hk}^{(1)}}{dt} = \mathbf{A}_{hk}\mathbf{X}_{hk}^{(1)} + \mathbf{P}_{hk}(\mathbf{X}_{hk}^{(0)}, \mathbf{X}_{pq}^{(0)}), \quad \frac{d\mathbf{X}_{pq}^{(1)}}{dt} = \mathbf{A}_{pq}\mathbf{X}_{pq}^{(1)} + \mathbf{P}_{pq}(\mathbf{X}_{hk}^{(0)}, \mathbf{X}_{pq}^{(0)}), \quad (7)$$

где $\mathbf{X}_{hk}^{(0)}, \mathbf{X}_{pq}^{(0)}$ — решения систем однородных уравнений

$$\frac{d\mathbf{X}_{hk}^{(0)}}{dt} = \mathbf{A}_{hk}\mathbf{X}_{hk}^{(0)}, \quad \frac{d\mathbf{X}_{pq}^{(0)}}{dt} = \mathbf{A}_{pq}\mathbf{X}_{pq}^{(0)},$$

имеющих матрицы фундаментальных систем решений $\mathbf{N}_{hk}(t)$, $\mathbf{N}_{pq}(t)$, соответственно.

Без нарушения общности рассмотрения можно положить начальный момент времени равным нулю. Найдем векторы произвольных постоянных \mathbf{C}_{hk} , \mathbf{C}_{pq} для каждой системы однородных уравнений из соотношений

$$\mathbf{X}_{hk}^{(0)}(0) = \mathbf{N}_{hk}(0)\mathbf{C}_{hk}, \quad \mathbf{X}_{pq}^{(0)}(0) = \mathbf{N}_{pq}(0)\mathbf{C}_{pq},$$

где $\mathbf{N}_{hk}(0)$, $\mathbf{N}_{pq}(0)$ — матрицы фундаментальных систем решений, вычисленные на начальный момент времени, а $\mathbf{X}_{hk}^{(0)}(0)$, $\mathbf{X}_{pq}^{(0)}(0)$ — начальные условия, т. е. значения элементов орбит на начальный момент времени, которые мы считаем заданными.

Теперь $\mathbf{X}_{hk}^{(0)}$, $\mathbf{X}_{pq}^{(0)}$ становятся известными функциями времени

$$\mathbf{X}_{hk}^{(0)}(t, \mathbf{C}_{hk}) = \mathbf{N}_{hk}(t)\mathbf{C}_{hk}, \quad \mathbf{X}_{pq}^{(0)}(t, \mathbf{C}_{pq}) = \mathbf{N}_{pq}(t)\mathbf{C}_{pq}$$

и содержат первые степени синусов и косинусов линейных по времени аргументов. После подстановки этих функций в правые части уравнений (7) слагаемые $\mathbf{P}_{hk}(\mathbf{X}_{hk}^{(0)}, \mathbf{X}_{pq}^{(0)})$ и $\mathbf{P}_{pq}(\mathbf{X}_{hk}^{(0)}, \mathbf{X}_{pq}^{(0)})$ станут известными функциями времени и будут содержать третьи степени синусов и косинусов линейных по времени аргументов.

Теперь каждая из систем уравнений (7) имеет вид (5). Поэтому далее можно рассматривать последовательность операций при решении этих уравнений согласно соотношению (6). Подставим в это соотношение найденные функции $\mathbf{N}^{-1}(\tau)$ и $\mathbf{P}(\tau)$. Получим в подынтегральном выражении сумму конечного числа слагаемых, содержащих четвертые степени синусов и косинусов линейных по времени аргументов. Среди слагаемых могут встретиться постоянные величины, которые после интегрирования по аргументу времени дадут линейные по времени функции. Эти функции после умножения на матрицу $\mathbf{N}(t)$ приведут к смешанным функциям в решении поставленной задачи. Легко показать, что в решении могут появиться также и вековые члены. Такая форма решения не соответствует реальным свойствам движения.

Указанного противоречия можно избежать, если изменить порядок получения решения следующим образом. Введем в рассмотрение две неопределенные пока постоянные матрицы \mathbf{d}_{hk} , \mathbf{d}_{pq} . Предположим только, что элементы этих постоянных матриц малы и имеют второй порядок малости по отношению к малым искомым функциям h_i, k_i, p_i, q_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Запишем уравнения (4) в виде

$$\frac{d\mathbf{X}_{hk}}{dt} = (\mathbf{A}_{hk} + \mathbf{d}_{hk})\mathbf{X}_{hk} + \mathbf{P}_{hk}(\mathbf{X}_{hk}, \mathbf{X}_{pq}) - \mathbf{d}_{hk}\mathbf{X}_{hk}, \quad (8)$$

$$\frac{d\mathbf{X}_{pq}}{dt} = (\mathbf{A}_{pq} + \mathbf{d}_{pq})\mathbf{X}_{pq} + \mathbf{P}_{pq}(\mathbf{X}_{hk}, \mathbf{X}_{pq}) - \mathbf{d}_{pq}\mathbf{X}_{pq}. \quad (9)$$

Здесь последние слагаемые в правых частях уравнений имеют третий порядок малости. Тогда метод последовательных приближений в первом приближении дает

$$\frac{d\mathbf{X}_{hk}^{(1)}}{dt} = (\mathbf{A}_{hk} + \mathbf{d}_{hk})\mathbf{X}_{hk}^{(1)} + \mathbf{P}_{hk}(\mathbf{X}_{hk}^{(0)}, \mathbf{X}_{pq}^{(0)}) - \mathbf{d}_{hk}\mathbf{X}_{hk}^{(0)}, \quad (10)$$

$$\frac{d\mathbf{X}_{pq}^{(1)}}{dt} = (\mathbf{A}_{pq} + \mathbf{d}_{pq})\mathbf{X}_{pq}^{(1)} + \mathbf{P}_{pq}(\mathbf{X}_{hk}^{(0)}, \mathbf{X}_{pq}^{(0)}) - \mathbf{d}_{pq}\mathbf{X}_{pq}^{(0)}. \quad (11)$$

Теперь каждую из этих систем уравнений можно записать в следующем общем виде:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = (\mathbf{A} + \mathbf{d})\mathbf{X} + \mathbf{P}(t, \mathbf{C}) - \mathbf{d}\mathbf{X}^{(0)}(t, \mathbf{C}). \quad (12)$$

Применим к этим уравнениям формулы решения систем неоднородных уравнений (6), получим

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{N}'(t)\mathbf{C} + \mathbf{N}'(t) \int_0^t [\mathbf{N}'^{-1}(\tau)\mathbf{P}(\tau, \mathbf{C}) - \mathbf{N}'^{-1}(\tau)\mathbf{d}\mathbf{X}^{(0)}(\tau, \mathbf{C})]d\tau, \quad (13)$$

где \mathbf{N}' — матрица фундаментальной системы решений системы однородных уравнений

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = (\mathbf{A} + \mathbf{d})\mathbf{X}. \quad (14)$$

Обозначим через $\mathbf{S}(\mathbf{C})$ постоянную часть произведения $\mathbf{N}'^{-1}(\tau)\mathbf{P}(\tau, \mathbf{C})$, а через $\mathbf{V}(\tau, \mathbf{C})$ — переменную часть этого произведения, т. е. синусы и косинусы

кратных линейных по времени аргументов. Тогда имеем

$$\mathbf{N}'^{-1}(\tau)\mathbf{P}(\tau, \mathbf{C}) = \mathbf{S}(\mathbf{C}) + \mathbf{V}(\tau, \mathbf{C}) .$$

Оба слагаемых в этом выражении будут иметь третий порядок малости. Подставив это выражение в формулу (13), получим

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{N}'(t)\mathbf{C} + \mathbf{N}'(t) \int_0^t [\mathbf{S}(\mathbf{C}) + \mathbf{V}(\tau, \mathbf{C}) - \mathbf{N}'^{-1}(\tau)\mathbf{d} \mathbf{X}^{(0)}(\tau, \mathbf{C})] d\tau . \quad (15)$$

Определим введенную выше постоянную матрицу \mathbf{d} из условия

$$\mathbf{N}'^{-1}(\tau)\mathbf{d} \mathbf{X}^{(0)}(\tau, \mathbf{C}) = \mathbf{S}(\mathbf{C}) . \quad (16)$$

Поскольку $\mathbf{X}^{(0)}(\tau, \mathbf{C})$ имеет первый, а $\mathbf{S}(\mathbf{C})$ — третий порядок малости, то матрица \mathbf{d} получается второго порядка малости, как мы и предполагали заранее.

Теперь решение можно записать в виде

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{N}'(t)\mathbf{C} + \mathbf{N}'(t) \int_0^t \mathbf{V}(\tau, \mathbf{C}) d\tau , \quad (17)$$

и оно не будет содержать вековых членов. Соотношение (16) можно рассматривать как уравнение для определения матрицы \mathbf{d} . Это уравнение можно еще записать в виде

$$\mathbf{d} \mathbf{N}'(t)\mathbf{C} = \mathbf{N}'(t)\mathbf{S}(\mathbf{C}) . \quad (18)$$

Выведем формулы для вычисления элементов матрицы \mathbf{d} . Для этого обозначим через S_i ($i = 1, 2, \dots, 2n$) компоненты матрицы-столбца $\mathbf{S}(\mathbf{C})$. Оказывается, что матрицу \mathbf{d} , имеющую размерность $(2n \times 2n)$, можно представить в виде комбинации

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}^{(a)} & \mathbf{d}^{(b)} \\ -\mathbf{d}^{(b)} & \mathbf{d}^{(a)} \end{pmatrix} ,$$

где матрицы $\mathbf{d}^{(a)}$ и $\mathbf{d}^{(b)}$ имеют размерность $(n \times n)$.

Элементы матриц $\mathbf{d}^{(a)}$ и $\mathbf{d}^{(b)}$ находятся из решения следующих систем линейных неоднородных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^n d_{k,i}^{(a)} q_p^{(i)} = q_p^{(k)} \frac{S_{2p} C_{2p} + S_{2p-1} C_{2p-1}}{C_{2p}^2 + C_{2p-1}^2}, k, p = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^n d_{k,i}^{(b)} q_p^{(i)} = q_p^{(k)} \frac{S_{2p} C_{2p-1} - S_{2p-1} C_{2p}}{C_{2p}^2 + C_{2p-1}^2}, k, p = 1, 2, \dots, n.$$

Путем несложных выкладок нам удалось доказать равенство нулю матрицы $\mathbf{d}^{(a)}$. Этот факт может служить контролем правильности вычислений. Теперь система однородных уравнений (14) будет иметь вид

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A}_1 + \mathbf{d}^{(b)} \\ -\mathbf{A}_1 - \mathbf{d}^{(b)} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}.$$

Неизвестные матрицы \mathbf{d} , \mathbf{N}' нельзя определить прямыми вычислениями по формулам. Однако, учитывая малость элементов матрицы $\mathbf{d}^{(b)}$ по сравнению с элементами матрицы \mathbf{A}_1 , искомые матрицы можно найти последовательными приближениями. Положим в нулевом приближении $\mathbf{d}^{(b)} = 0$. Определим при этом условии нулевое приближение матрицы фундаментальной системы решений \mathbf{N}' . Найдем первое приближение матрицы $\mathbf{d}^{(b)}$ из уравнения (18). Определим теперь первое приближение матрицы фундаментальной системы решений \mathbf{N}' с учетом первого приближения матрицы $\mathbf{d}^{(b)}$. Учитывая точность, с которой построены исходные уравнения, этих приближений будет достаточно.

В итоге мы получаем решение нелинейных уравнений для вековых возмущений элементов h_i, k_i, p_i, q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) с учетом членов четвертой степени в разложении возмущающей функции по степеням этих элементов. Решение представлено ограниченными функциями. Фактически вклад нелинейной части уравнений движения в решение для искомых элементов Лагранжа выражается отрезками тригонометрических рядов относительно аргументов, кратных $g_1 t, g_2 t, \dots, g_n t, s_1 t, s_2 t, \dots, s_n t$, где частоты g_1, g_2, \dots, g_n и s_1, s_2, \dots, s_n являются соб-

ственными значениями матриц $\mathbf{A}_{hk} + \mathbf{d}_{hk}$ и $\mathbf{A}_{pq} + \mathbf{d}_{pq}$ соответственно. Суммарная кратность аргументов равна 1 или 3 для разных слагаемых.

2.4 Результаты

Для практических применений разработанного метода была написана программа на языке Си. Программа включает в себя вычисление коэффициентов Лапласа для заданных значений отношения больших полуосей спутников, вычисление функций f_2, f_3, \dots, f_{26} , вычисление матрицы коэффициентов линейной части уравнений движения и получение решения системы линейных уравнений в виде функций времени. Для определения неоднородной части уравнений необходимо выполнять операции перемножения тригонометрических рядов с буквенными аргументами и численными коэффициентами, а также интегрирование таких рядов по времени. Эти операции были также запрограммированы на языке Си. В итоге программа позволяет получать решение поставленной задачи в виде отрезков тригонометрических рядов относительно буквенных аргументов.

Разработанный метод мы применили для вычисления вековых возмущений элементов Лагранжа пяти главных спутников Урана. В качестве исходных данных были взяты значения, принятые в работе Laskar, Jacobson (1987). Для параметров гравитационного поля Урана взяты следующие значения: $\mu_0 = 5793950.0 \text{ км}^3/\text{с}^2$, $J_2 = 0.0033461$, $J_4 = -0.0000321$. При сравнении с результатами Laskar, Jacobson (1987) мы столкнулись с тем фактом, что в статье Laskar, Jacobson (1987) не указано, какое значение радиуса планеты они использовали. Поэтому мы подобрали из имеющихся в публикациях разных значений среднего экваториального радиуса Урана то значение, при котором мы получаем результаты, наиболее сходные с результатами Laskar, Jacobson (1987). Таким значением оказалось $r_0 = 25559.0 \text{ км}$ (Archinal et al., 2011). Принятые значения гравитационных постоянных и исходные значения параметров орбит спутников приведены в Табл. 1.

Сначала вычисления были сделаны в рамках линейной теории Лапласа — Лагранжа. Полученные собственные векторы и собственные значения матриц \mathbf{A}_1 при решении системы уравнений относительно элементов h, k и p, q соответ-

Таблица 1: Гравитационные параметры μ , большие полуоси a и начальные значения элементов Лагранжа орбит спутников.

Спутник	μ , км ³ /с ²	a , км	h_0	k_0	p_0	q_0
Миранда	4.4	129872.0	0.00086945	0.00099909	-0.02074708	0.03170562
Ариэль	86.1	190945.0	0.00162034	-0.00119231	0.00043281	0.00043650
Умбриэль	84.0	265998.0	0.00357835	-0.00126154	0.00084538	0.00072860
Титания	230.0	436298.0	0.00080316	0.00186452	0.00026724	-0.00042066
Оберон	200.0	583519.0	0.00013445	0.00067042	-0.00096130	-0.00008486

ственно приведены в Табл. 2, 3.

После проведения вычислений согласно нелинейной теории вековых возмущений матрицы \mathbf{A}_1 были скорректированы с учетом найденных матриц $\mathbf{d}^{(b)}$. Снова были вычислены собственные векторы и собственные значения этих матриц. Эти результаты даны в Табл. 4, 5.

Мы получили также члены третьей степени относительно эксцентриситетов и наклонов орбит спутников в решении для элементов Лагранжа. Оказалось, что амплитуды этих членов не превышают величины 5×10^{-6} . Это соответствует точности вычисления планетоцентрических координат спутников приблизительно 2.5 км и точности геоцентрических угловых координат 0.16 мсд. При использовании наземных наблюдений этими членами можно пренебречь.

Что касается собственных частот, то различия результатов в линейной и нелинейной теориях оказываются существенными по сравнению с точностью наземных наблюдений. В линейной и нелинейной теориях первые из пяти собственных частот в каждой из матриц A_{hk} и A_{pq} (матриц A для систем уравнений относительно элементов h, k и p, q соответственно) фактически задают угловые скорости изменения долготы перицентра и долготы узла орбиты Миранды. Это легко видеть из значений собственных векторов матриц. Периоды обращений

Таблица 2: Собственные векторы E_i ($i = 1, 2, \dots, n$) матрицы \mathbf{A}_1 при решении линейных уравнений относительно элементов h, k .

Параметр	Миранда	Ариель	Умбриель	Титания	Оберон
E_1	-0.99999665	0.00258370	0.00016247	0.00001361	0.00000306
E_2	-0.05769601	-0.95440581	0.18291663	0.00103823	0.00027857
E_3	0.01763253	0.21771396	0.98825141	-0.08190896	0.01872864
E_4	0.00436149	0.04616769	0.19984853	0.60492078	-0.49174114
E_5	-0.00444982	-0.03945120	-0.15761859	-0.79677879	-0.99375892
g , град./год	<i>19.46823476</i>	<i>5.95117664</i>	<i>2.73360007</i>	<i>1.73539456</i>	<i>0.38302580</i>

¹Примечание: в последней строке курсивом выделены собственные значения g для каждого из спутников.

Таблица 3: Собственные векторы I_i ($i = 1, 2, \dots, n$) матрицы \mathbf{A}_1 при решении линейных уравнений относительно элементов p, q .

Параметр	Миранда	Ариель	Умбриель	Титания	Оберон
I_1	-0.99999468	0.00325324	0.00029026	0.00003833	0.00001167
I_2	0.07021884	0.93156012	-0.21163977	-0.00275175	-0.00080212
I_3	-0.02676036	-0.25234056	-0.97003078	0.12170198	-0.03188127
I_4	-0.00980894	-0.07871677	-0.28216746	-0.55476184	0.48216682
I_5	0.01224363	0.07747654	0.24310027	0.86430802	1.03233271
g , град./год	<i>-19.46955428</i>	<i>-6.00743711</i>	<i>-2.70847094</i>	<i>-1.82643083</i>	<i>-0.25953867</i>

²Примечание: в последней строке курсивом выделены собственные значения g для каждого из спутников.

Таблица 4: Собственные векторы E_i ($i = 1, 2, \dots, n$) матрицы \mathbf{A}_2 при решении нелинейных уравнений относительно элементов h, k .

Параметр	Миранда	Ариель	Умбриель	Титания	Оберон
E_1	-0.99999665	0.00258370	0.00016247	0.00001361	0.00000306
E_2	-0.05767651	-0.95408324	0.18285481	0.00103788	0.00027847
E_3	0.01763740	0.21777414	0.98852460	-0.08193160	0.01873382
E_4	0.00436040	0.04615615	0.19979859	0.60476962	-0.49161826
E_5	-0.00445121	-0.03946349	-0.15766771	-0.79702708	-0.99406859
g , град./год	<i>19.17993169</i>	<i>5.94876926</i>	<i>2.73340063</i>	<i>1.73524926</i>	<i>0.38302122</i>

³Примечание: в последней строке курсивом выделены собственные значения g для каждого из спутников.

Таблица 5: Собственные векторы I_i ($i = 1, 2, \dots, n$) матрицы \mathbf{A}_2 при решении нелинейных уравнений относительно элементов p, q .

Параметр	Миранда	Ариель	Умбриель	Титания	Оберон
I_1	-0.99999468	0.00325324	0.00029026	0.00003833	0.00001167
I_2	0.07020903	0.93142995	-0.21161020	-0.00275136	-0.00080201
I_3	-0.02676257	-0.25236137	-0.97011076	0.12171202	-0.03188390
I_4	-0.00980813	-0.07871030	-0.28214429	-0.55471628	0.48212721
I_5	0.01224534	0.07748734	0.24313416	0.86442854	1.03247666
g , град./год	<i>-19.38125984</i>	<i>-6.00517644</i>	<i>-2.70836039</i>	<i>-1.82641316</i>	<i>-0.25953275</i>

⁴Примечание: в последней строке курсивом выделены собственные значения g для каждого из спутников.

перигея и узла Миранды составляют около 18 лет. Различия частот в линейной и нелинейной теориях составляют 0.3 град./год. На интервале времени 100 лет различия в значениях элементов Лагранжа h , k и p , q будут иметь порядок значений эксцентриситета и наклона орбиты соответственно. В координатах Миранды эти различия будут составлять около 4000 км, что в геоцентрических координатах составляет более 0.1 сек. дуги.

Заметим, что различия остальных собственных частот, а соответственно различия в решениях для элементов Лагранжа других спутников, оказываются примерно в 50 раз меньше. На интервалах времени более 100 лет поправки к частотам с номерами 2 — 5, обусловленные членами третьей степени в уравнениях, могут привести к изменениям координат спутников 200 — 400 км.

В результате вычислений мы получили формулы, представляющие вековые возмущения элементов орбит главных спутников Урана с точностью до первого порядка относительно возмущающих масс и до третьей степени относительно малых эксцентриситетов и наклонов орбит. Эти формулы могут быть основой для построения аналитической теории движения главных спутников Урана.

Следует заметить, что выражения для вековых возмущений мы получили путем осреднения по средним долготам всех гравитационно-взаимодействующих спутников полных уравнений относительно элементов Лагранжа. Проверка того, насколько точно эти выражения описывают эволюцию орбит спутников, может быть сделано только путем сравнения аналитической теории движения с результатами численным интегрированием уравнений движения или с наблюдениями. Для этого необходимо вычислить также все короткопериодические возмущения всех шести элементов.

В работе Laskar, Jacobson (1987) построена аналитическая теория движения главных спутников Урана на основе линейной теории вековых возмущений Лапласа-Лагранжа. Авторы этой работы переопределили основные частоты решения по результатам численного интегрирования уравнений движения и вы-

Таблица 6: Основные частоты решения, полученные в настоящей работе и в работе Laskar, Jacobson (1987).

Номер частоты	В настоящей работе		В работе Laskar, Jacobson (1987)	
	Линейная теория	Нелинейная теория	Линейная теория	После уточнения
Для h, k				
1	19.468	19.180	19.440	20.082
2	5.951	5.949	5.944	6.217
3	2.734	2.733	2.731	2.865
4	1.735	1.735	1.735	2.078
5	0.383	0.383	0.383	0.386
Для p, q				
1	-19.470	-19.381	-19.453	-20.309
2	-6.007	-6.005	-5.999	-6.288
3	-2.708	-2.708	-2.706	-2.288
4	-1.826	-1.826	-1.828	-1.843
5	-0.260	-0.260	-0.259	-0.259

⁵Примечание: Единицы измерения частот — град./год

полнили уточнение параметров орбит на основе наблюдений. Для сравнения наших результатов с результатами работы Laskar, Jacobson (1987) мы свели полученные значения основных частот решения в Табл. 6.

Из сравнения можно сделать следующие выводы. Корректирующие поправки частот, вычисленные Laskar, Jacobson (1987) на основе численного интегрирования уравнений движения, превышают различия частот в линейной и нелинейной теориях. Основные частоты решения в линейной теории при одинаковых исходных данных различаются в настоящей работе и в работе Laskar, Jacobson (1987). Для понимания причин различий необходимы дальнейшие исследования.

2.5 Заключение

В настоящей главе разработан метод вычисления вековых возмущений в задаче движения системы малых тел вокруг массивного центрального тела. По сравнению с классической теорией Лапласа — Лагранжа, основанной на линейных уравнениях учтены члены третьей степени относительно эксцентриситетов и наклонов орбит. Соответствующее уточнение решения оказывается существенным при изучении эволюции орбит на больших интервалах времени.

Предложенный метод был применен для исследования движения главных спутников Урана. Показано, что на интервалах времени больше 100 лет вклад полученных дополнительных вековых возмущений для спутника Миранда имеет порядок величины эксцентриситета орбиты, что в линейной мере составляет несколько тысяч километров. Для других спутников эффект учета нелинейных членов оказывается меньшим. Очевидно, что при построении общей аналитической теории движения главных спутников Урана необходимо учитывать нелинейные члены в уравнениях для вековых возмущений. Соответствующий метод построен, исследован и предложен в настоящей главе.

Глава 3. Теория движения спутников Урана на основе наблюдений

В данной главе мы предлагаем новую модель движения главных спутников Урана, разработанную методом численного интегрирования уравнений движения спутников и основанную на наблюдениях. Главное отличие нашей модели от результатов предшествующих работ заключается в том, что при улучшении орбит спутников были использованы все доступные на данный момент времени наблюдения спутников Урана, начиная с момента их открытия в 1787 году, до 2008 года, т. е. на интервале более 220 лет, а также астрометрические результаты фотометрических наблюдений взаимных покрытий и затмений главных спутников Урана в 2007-2008 годах.

Целью разработки новой модели движения главных спутников Урана было создание новых более точных эфемерид этих спутников.

3.1 Модель движения и метод улучшения орбит

Для получения эфемерид пяти главных спутников Урана мы решали дифференциальные уравнения движения этих спутников относительно координат в планетоцентрической невращающейся декартовой системе с направлениями осей координат в соответствии с International Celestial Reference Frame (ICRF). Идентичность системы координат с ICRF обеспечивается посредством приведения результатов наблюдений к ICRF. Координаты Солнца вычислялись также в ICRF с помощью планетных эфемерид INPOP10 (Fienga и др., 2011).

В правых частях уравнений движения учитывались следующие возмущения:

- от взаимного притяжения спутников,
- от несферичности Урана (только 2-я и 4-я зональные гармоники),
- от притяжения Солнца.

Постоянная ориентация северного полюса Урана в системе координат ICRF была задана в соответствии с докладом рабочей группы международного астрономического союза (МАС) (Archinal и др., 2011).

Дифференциальные уравнения движения спутников мы рассматривали в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_i = & -\frac{G(m_0 + m_i)\mathbf{r}_i}{r_i^3} + \sum_{j=1, j \neq i}^{N+1} Gm_j \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right) \\ & + G(m_0 + m_i)\mathbf{R}\mathbf{F}_{2,4}(\mathbf{R}^T \mathbf{r}_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N Gm_j \mathbf{R}\mathbf{F}_{2,4}(\mathbf{R}^T \mathbf{r}_j). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь G – универсальная гравитационная постоянная, m_0 – масса Урана, m_i – масса i -го спутника ($i = 1, 2, \dots, N$), \mathbf{r}_i – радиус-вектор i -го спутника в выбранной планетоцентрической системе координат (ICRF), а N – число рассматриваемых спутников (в нашем случае $N = 5$). При $j = N + 1$ имеем: \mathbf{r}_{N+1} и m_{N+1} ($m_{N+1} = m_{Sun}$) – радиус-вектор и масса Солнца, соответственно. Кроме того, Δ_{ij} – расстояние от i -го спутника до тела номер j , \mathbf{R} – матрица перехо-

Таблица 7: Значения постоянных, принятые в данной работе при построении теории движения спутников Урана на основе наблюдений.

Постоянная	Значение	Источник
r_0	26200 км	French et al. (1988)
J_2	3.34343×10^{-3}	
J_4	-2.885×10^{-5}	
Gm_0	5793939.3 км ³ /с ²	Jacobson (1992)
Gm_1	90.3 км ³ /с ²	
Gm_2	78.2 км ³ /с ²	
Gm_3	235.3 км ³ /с ²	
Gm_4	201.1 км ³ /с ²	
Gm_5	4.4 км ³ /с ²	
Gm_{Sun}	132712440055.0 км ³ /с ²	Fienga et al. (2011)
c ,	299792.458 км/с	Archinal et al. (2011)
AU	149597870.70 км	
α_0	257.311 град.	
δ_0	-15.175 град.	

да от планетоэкваториальных координат к координатам в ICRF, а под $\mathbf{F}_{2,4}(\mathbf{r}_p)$ подразумевается часть разложения вектора возмущающего ускорения планеты в планетоэкваториальной системе координат, обусловленная второй и четвертой зональными гармониками и записанная как функция от планетоэкваториальных координат спутника, составляющих вектор \mathbf{r}_p . Матрица \mathbf{R} зависит от геоэкваториальных координат северного полюса Урана α_0 , δ_0 , а вектор $\mathbf{F}_{2,4}(\mathbf{r}_p)$ содержит экваториальный радиус Урана r_0 и коэффициенты J_2 , J_4 при второй и четвертой зональных гармониках, соответственно.

В Табл. 7 представлены принятые в данной работе значения всех параметров, входящих в уравнения движения спутников, а также принятые значения астрономической единицы AU и скорости света c .

Численное интегрирование данной системы уравнений проводилось ме-

тодом Эверхарта с автоматическим выбором шага интегрирования (Everhart, 1985). При численном интегрировании уравнений движения неизбежно накапливаются погрешности. Для обеспечения надежности результатов и дополнительного контроля точности все вычисления делались также с применением метода численного интегрирования, предложенного в работе (Belikov, 1993), который основан на разложении решения на одном шаге в ряды по полиномам Чебышева. Поскольку этот последний метод значительно отличается от метода Эверхарта (Everhart, 1985), можно ожидать что таким образом будет обеспечен контроль точности решения. Сравнение решений, полученных двумя методами, показало, что на интервале времени 250 лет они совпадают с большим запасом точности по сравнению с точностью наблюдений.

Улучшение орбит проводилось методом наименьших квадратов (МНК). В качестве уточняемых параметров движения спутников были взяты элементы Лагранжа орбит спутников:

$$n, \quad \lambda = M + \omega + \Omega, \quad h = e \sin \pi, \quad k = e \cos \pi, \quad p = \sin \frac{I}{2} \sin \Omega, \quad q = \sin \frac{I}{2} \cos \Omega,$$

где n — среднее движение, λ — средняя долгота, M — средняя аномалия, e — эксцентриситет, I — наклон, ω — угловое расстояние перицентра от узла, Ω — долгота узла. Обозначения здесь относятся к любому из спутников, номер спутника мы опускаем. Элементы i и Ω отсчитываются в планетозекваториальной системе координат. Ось z этой системы направлена в южный плюс Урана, а ось x — в восходящий узел основной плоскости этой системы относительно геоэкватора. При таком выборе системы координат обеспечивается прямое орбитальное движение главных спутников Урана в этой системе.

Стоит отметить обоснованность выбора в качестве уточняемых параметров элементов Лагранжа. При выборе в качестве уточняемых параметров декартовых координат и компонент скорости спутников при уточнении по наблюдениям на интервалах более 20 лет оказалось, что процесс уточнения не сходится. Однако при уточнении элементов Лагранжа процесс уточнения сходится за 4-5

итераций.

Для уточнения параметров движения спутников по наблюдениям необходимы частные производные от измеряемых функций по параметрам. В отличие от работы (Laineu, 2008), в нашей работе эти частные производные определялись как отношение конечных приращений функции и аргумента. Для этого уравнения движения интегрировались повторно несколько раз с заданным конечным приращением каждого параметра.

Перед тем, как уточнять элементы Лагранжа орбит спутников по реальным наблюдениям, было проведено уточнение параметров по вычисленным значениям геоэкуаториальных координат спутников с помощью эфемериды (Laineu, 2008) на максимальном для этой эфемериды интервале времени 20 лет. Средне-квадратичная величина остаточных отклонений ("О-С") после уточнения параметров не превысила 0.001 секунд дуги для всех спутников. В значениях прямоугольных координат спутников это не превышает 15 км. Такая согласованность демонстрирует идентичность моделей возмущающих сил, действующих на спутники, в нашей работе и в работе (Laineu, 2008).

Основная работа заключалась в дифференциальном уточнении параметров движения спутников по всем доступным в публикациях наблюдениям. Целью было получение наиболее достоверных эфемерид.

Отметим, что после уточнения параметров движения спутников по наблюдениям была проведена итоговая генерация эфемерид пяти главных спутников Урана на интервале времени с 1787 по 2031 год. Эфемериды сделаны в виде файлов данных, содержащих коэффициенты разложений прямоугольных планетоцентрических координат в ряды по полиномам Чебышева отдельно на каждом из подинтервалов времени в одни сутки. Члены в рядах брались до 12 степени полиномов, включительно. Формат соответствует формату аналогичных данных в сервере эфемерид MULTI-SAT (Emelyanov, Arlot, 2008).

3.2 Состав использованных наблюдений

При улучшении орбит главных спутников Урана были использованы почти все доступные на момент написания статьи наблюдения, начиная с момента открытия первых двух спутников в 1787 году Уильямом Гершелем. По способу наблюдений данные можно разделить на следующие типы.

1. Микрометрические наблюдения. Измеряются топоцентрические угловое расстояние и позиционный угол спутника относительно планеты или другого спутника. Эти две координаты часто измеряются в разные моменты времени. В таких случаях мы рассматривали их как два отдельных наблюдения. Результаты наблюдений приводились к системе координат экватора и равноденствия эпохи J2000.

1. Абсолютные топоцентрические наблюдения, при которых измеряемыми величинами являются прямое восхождение α и склонение δ спутника. Почти все найденные абсолютные наблюдения уже были приведены к ICRF (International Celestial Reference Frame). Только в работе (Debehogne et al. 1981) опубликованы 24 наблюдения в системе координат звездного каталога FK4. В этом случае координаты переводились сначала в систему координат J2000 согласно резолюции IAU с помощью процедуры, описанной в работе Aoki et al. (1983). Окончательно абсолютные координаты спутников приводились к ICRF с использованием углов поворота из работы Feissel, Mignard (1998).

2. Относительные топоцентрические наблюдения спутников. Измеряются разности прямых восхождений и склонений спутника и планеты, либо двух спутников. Результаты наблюдений, где это было необходимо, приводились к системе координат экватора и равноденствия эпохи J2000.

4. Угломерные наблюдения, выполненные с помощью космического аппарата Вояджер-2. Данные были взяты из работы (Jacobson, 1992). В этой работе даются прямые восхождения и склонения спутников в системе координат с началом в космическом аппарате, а также прямоугольные планетоцентриче-

ские координаты космического аппарата в геоэкваториальной системе экватора и равноденствия эпохи FK4/B1950. Измеренные координаты спутников и координаты космического аппарата приводились к системе FK5/J2000, а затем к ICRF согласно процедурам, указанным для абсолютных наблюдений.

5. Псевдогелиоцентрические наблюдения. Астрометрические данные в этом случае получаются в результате обработки фотометрических наблюдений взаимных затмений спутников. На некоторый средний момент явления даются разности гелиоцентрических геоэкваториальных координат двух спутников. При использовании этих данных нужно учитывать, что положения спутников определяются в разные моменты времени, определяемые временем распространения света. Положение затмевающего спутника определяется на момент t_2 , положение затмеваемого – на момент t_1 , при этом $t_2 < t_1 < t_0$, а t_0 – момент наблюдения.

Отметим некоторые особенности наблюдений.

Микрометрические наблюдения. Остаточные отклонения наблюдаемых координат от вычисленных ("О-С") для микрометрических наблюдений определялись по формуле

$$\sigma = \sqrt{((S^o - S^c)^2 + [S^c(P^o - P^c)]^2)},$$

где S^o , S^c – наблюдаемое и вычисленное значения углового расстояния, P^o , P^c – наблюдаемое и вычисленное значения позиционного угла. Случаи, когда измерялось только угловое расстояние или только позиционный угол, рассматривались как отдельные наблюдения, а в выражении для σ бралось только одно из слагаемых.

Абсолютные наблюдения. Прямые восхождения и склонения получаются из измерений положений спутников на фотоприемниках относительно звезд и координат звезд из каталогов. Ошибки координат звезд из звездных каталогов непосредственно входят в ошибки абсолютных наблюдений спутников. Кроме того, в вычисленные прямые восхождения и склонения спутников непосредственно входит ошибка применяемой модели движения планет. Поэтому разно-

сти измеренных и вычисленных координат спутников содержат систематические ошибки. Предварительный анализ этих разностей показал, что средние значения отклонений по разным группам наблюдений существенно меньше их средне-квадратичных величин. Поэтому мы не исключали из абсолютных наблюдений систематические ошибки, которые могли бы быть получены из предварительного анализа. Остаточные отклонения наблюдаемых координат от вычисленных ("О-С") для абсолютных наблюдений мы вычисляли по формуле

$$\sigma = \sqrt{[(\alpha^o - \alpha^c) \cos \delta]^2 + (\delta^o - \delta^c)^2},$$

где α^o , δ^o – измеренные значения прямых восхождений и склонений, а α^c , δ^c – вычисленные значения этих координат.

Относительные наблюдения. Для относительных наблюдений остаточные отклонения наблюдаемых координат от вычисленных ("О-С") мы определяли по формуле

$$\sigma = \sqrt{[(\Delta(\alpha)^o - \Delta(\alpha)^c) \cos \delta]^2 + (\Delta(\delta)^o - \Delta(\delta)^c)^2},$$

где $\Delta(\alpha)^o$, $\Delta(\delta)^o$ – измеренные разности прямых восхождений и склонений, $\Delta(\alpha)^c$, $\Delta(\delta)^c$ – вычисленные разности этих координат.

Относительные координаты спутников из фотометрических наблюдений взаимных покрытий и затмений спутников. Кроме фотографических наблюдений и наблюдений с помощью ПЗС-камеры, разности угловых координат двух спутников получают также из фотометрических наблюдений взаимных покрытий двух спутников. Наблюдения взаимных покрытий дают разности топоцентрических координат. Эти наблюдения интерпретировались как обычные относительные наблюдения. В ряде случаев даны только значения позиционного угла одного спутника относительно другого на момент наблюдения. Из наблюдений взаимных затмений получают разности гелиоцентрических координат двух спутников. Мы использовали астрометрические результаты обработки фотометрических наблюдений главных спутников Урана, выполненных во время международной кампании наблюдений 2007-2008 гг

(Arlot et al. 2013). Эти результаты представляют собой 34 астрометрических измерения разностей топоцентрических или гелиоцентрических прямых восхождений и склонений пар спутников и 4 значения относительного позиционного угла. Пять аналогичных результатов были взяты из работы Mallama et al. (2009).

Наблюдения с космического аппарата Вояджер-2. При использовании наблюдений из работы (Jacobson, 1992) следует учитывать то, что в качестве моментов наблюдений даны моменты регистрации изображения в фотоприемнике, а измеренные координаты спутников и координаты космического аппарата даны для момента испускания фотонов с наблюдаемого спутника. Разности этих моментов, т. е. световое промежутки времени, опубликованы вместе с результатами наблюдений. Особенностью наблюдений с Вояджера-2 является тот факт, что наблюдения велись с относительно небольших расстояний от спутников, причем в разные моменты существенно с различных расстояний. Поэтому одинаковые ошибки измерений угловых координат спутников с космического аппарата и с наземных обсерваторий будут соответствовать различным значениям ошибок положений спутников на орбитах. Эти различия весьма существенные, так как с помощью Вояджера-2 наблюдения велись с расстояний 1 - 200 млн км, а наземные наблюдения спутников Урана выполняются на расстоянии в среднем 2875 млн км. Для того, чтобы можно было сравнивать между собой ошибки наблюдений разных типов, мы нормировали (умножали) остаточные отклонения наблюденных угловых координат от вычисленных ("О-С") для наблюдений с Вояджера на множитель $\rho/2875$, где ρ – расстояние космического аппарата от спутника, выраженное в млн км.

Остаточные отклонения наблюденных координат от вычисленных σ_i мы будем называть далее невязками наблюдений, а индекс i здесь будет номером наблюдения. Фактически невязка наблюдения есть угловое расстояние между наблюденным и вычисленным топоцентрическими положениями спутника. Такое определение невязок наблюдений позволяет сравнивать точность наблюде-

ний разных типов между собой.

Дифференциальное уточнение параметров движения главных спутников Урана мы делаем путем определения поправок к параметрам. Поправки находятся по методу наименьших квадратов (МНК) из условных уравнений. Каждое наблюдение дает нам одно или два условных уравнения. Применяя МНК, мы допускаем, что ошибки наблюдений являются случайными и независимыми между собой. Это позволяет рассматривать ковариационную матрицу ошибок наблюдений как некоторую диагональную матрицу. Диагональные элементы этой матрицы нужно знать с точностью до неопределенного множителя. Поскольку ковариационная матрица ошибок наблюдений нам неизвестна, при составлении нормальных уравнений МНК мы попытались подобрать весовые коэффициенты так, чтобы это соответствовало единичной ковариационной матрице ошибок наблюдений. Для этого весовые коэффициенты должны быть заданы обратно пропорциональными квадратам ошибок наблюдений.

Проблема сводится к определению ошибок наблюдений, которые априорно неизвестны. Решение может быть найдено, если распределить наблюдения по группам так, чтобы в одну группу попали предположительно равноточные наблюдения. Нужно сначала выполнить предварительное уточнение параметров движения спутников по всем наблюдениям, считая все наблюдения равноточными. Так определяются невязки σ_i для каждого наблюдения. Затем нужно определить среднеквадратичную величину невязок $\bar{\sigma}_k$ отдельно внутри каждой группы. Здесь через k мы обозначаем номер группы. Эти величины будут представлять ошибки наблюдений, по которым назначаются весовые коэффициенты. Таким образом все наблюдения одной группы будут иметь одинаковый вес, и весовые коэффициенты будут разными для разных групп. Весовой коэффициент наблюдений в группе k определяется по формуле

$$w_k = \frac{1}{\bar{\sigma}_k^2} .$$

Мы предполагаем, что однотипные наблюдения, выполненные по одной методи-

ке в одной обсерватории, имеют одинаковую точность.

Поскольку целью работы было создание эфемерид главных спутников Урана, основанных на наблюдениях, выполненных на максимальном интервале времени, мы попытались найти все опубликованные наблюдения главных спутников Урана, начиная с моментов их открытий. Во многих случаях опубликованные в статьях результаты наблюдений вводились в файлы данных вручную. Путем сравнения с эфемеридой GUST86 (Laskar, Jacobson, 1987) проверялось качество каждого наблюдения. Если отклонение измеренных координат спутников от эфемериды превышало 10 секунд дуги, такое наблюдение считалось грубо ошибочным и заранее отбрасывалось. Данные из нескольких публикаций были полностью отброшены. Значительные расхождения с эфемеридой можно объяснить неточностями в описаниях наблюдений. Мы не использовали данные, опубликованные в работах (Carlsberg veridian catalogues la Palma, 1999; Mulholland et al., 1979; Soulie, 1968; Soulie, 1972; Soulie, 1975; Soulie, 1978; van Biesbroeck, 1970; van Biesbroeck, 1976). Из всех других публикаций были отброшены в сумме 161 наблюдение. После сборки всех отобранных данных в файле оказались 30169 наблюдений.

На основе предварительного уточнения параметров орбит по отобранным 30169 наблюдениям были вычислены отклонения результатов наблюдений от эфемериды. Для 30 наблюдений отклонения превышали 5 секунд дуги, и они были отброшены. В итоге для построения эфемерид мы использовали 30139 наблюдений. Количество и интервалы времени наблюдений для каждого спутника даны в Табл. 8. Легко видеть, что сумма числа наблюдений в таблице для спутников значительно превышает указанное выше число использованных наблюдений. Это оказывается потому, что при некоторых относительных наблюдениях измерялись разности координат двух спутников, и такое наблюдение причислялось к наблюдениям каждого из двух спутников.

Используемая в настоящей работе база данных содержит весьма разно-

Таблица 8: Количество и интервалы времени использованных наблюдений для каждого спутника. Дано число оборотов, которое совершил спутник на интервале наблюдений.

Спутник	Число наблюдений	Даты начала и конца времени наблюдений	Интервал, лет	Число оборотов
U1 Ариэль	5469	1847/09/15 - 2008/01/04	160.303	23230
U2 Умбриэль	5510	1847/10/02 - 2008/01/03	160.252	14124
U3 Титания	10077	1787/02/16 - 2008/01/04	220.884	9267
U4 Оберон	15325	1787/02/16 - 2008/01/04	220.884	5992
U5 Миранда	3997	1948/02/15 - 2008/01/04	59.886	15475

родные наблюдения. Полный состав использованных наблюдений представлен в Табл. 9.

Таблица 9: Состав наблюдений и характеристики групп наблюдений. Здесь k – номер группы, N_k – количество наблюдений в группе, $\bar{\sigma}_k$ – среднеквадратическая величина остаточных невязок в группе, ΔT_k – период наблюдений. В столбце Тип указан тип наблюдений, и использованы следующие обозначения: rel - относительные, abs – абсолютные, microm – микрометрические, phot – фотографические, CCD – с помощью ПЗС-камеры, Voyager-2 – с космического аппарата Вояджер-2, phen – астрометрические результаты фотометрии взаимных покрытий и затмений, oss – для взаимных покрытий, ecl – для взаимных затмений, oss-P – по фотометрии взаимных покрытий определялся только позиционный угол. Перед названием обсерватории указан ее код по каталогу Международного Астрономического Союза, если он известен.

k	Тип	Публикация	Место наблюдений	ΔT_i	N_i	$\bar{\sigma}_k$
1	microm, rel	Herschel, 1835	Windsor	1787–1832	102	2.149
2	microm, rel	Lamont, 1840	532–Munich	1837–1837	26	1.639
3	microm, rel	Lassel, 1847, 1848a, 1848b, 1849, 1850, 1851, 1852a, 1952b, 1853, 1857, 1864, 1867	Valetta, Liverpool, Malta	1847–1865	484	1.263
4	microm, rel	Asten, 1872	084–Pulkovo	1847–1871	275	1.273
5	microm, rel	Winlock, Pickering, 1888	802–Harvard	1866–1868	58	1.922
6	microm, rel	Rosse Earl Of, 1875	Birr Castle	1872–1874	50	1.772
7	microm, rel	USNO, 1878, 1880, 1882, 1883, 1884, 1885a, 1885b, 1887, 1889, 1899; Hall, 1876, 1877, 1878, 1911a, 1921, 1922, 1923; Eppes, 1913; See, 1901, 1902, 1907; Frederickson, 1908; Frederick, Hammond, 1905; Dinwiddie, 1904	787–USNO before 1893, 786–USNO since 1893	1874–1922	1937	0.675
8	microm, rel	Holden, 1881	787–USNO	1877–1877	19	1.200

Таблица 9: Состав наблюдений и характеристики групп наблюдений. Здесь k – номер группы, N_k – количество наблюдений в группе, $\bar{\sigma}_k$ – среднеквадратическая величина остаточных невязок в группе, ΔT_k – период наблюдений. В столбце Тип указан тип наблюдений, и использованы следующие обозначения: rel - относительные, abs – абсолютные, microm – микрометрические, phot – фотографические, CCD – с помощью ПЗС-камеры, Voyager-2 – с космического аппарата Вояджер-2, phen – астрометрические результаты фотометрии взаимных покрытий и затмений, oss – для взаимных покрытий, ecl – для взаимных затмений, oss-P – по фотометрии взаимных покрытий определялся только позиционный угол. Перед названием обсерватории указан ее код по каталогу Международного Астрономического Союза, если он известен.

k	Тип	Публикация	Место наблюдений	ΔT_i	N_i	$\bar{\sigma}_k$
9	microm, rel	Hough, 1881	768–Dearborn	1880-1880	39	0.652
10	microm, rel	Henry Paul and Prosper, 1884a, 1884b, 1884c, 1884d	007–Paris	1883-1884	139	0.814
11	microm, rel	Perrotin, 1887	020-Nice	1887-1887	25	0.327
12	microm, rel	Schaeberle, 1895, 1897; Barnard, 1896; Hussey, 1902; Aitken, 1898, 1899, 1901, 1904, 1905, 1909, 1912, 1913	662–Mount Hamilton	1894-1914	1297	0.368
13	microm, rel	Hammond, 1911	786–USNO	1900-1907	930	0.611
14	microm, rel	Barnard, 1909, 1912, 1915, 1916, 1919	754–Williams Bay	1907-1918	526	0.466
15	microm, rel	Hall, 1929	786–USNO	1908-1925	581	0.529
16	phot, rel	Rosanof, 1925	192–Tashkent	1913-1914	16	1.216
17	phot, rel	Nicholson, 1915	662–Mount Hamilton	1914-1914	20	0.586
18	microm, rel	Barnard, 1927	754–Yerkes	1919-1922	112	0.456
19	phot, rel	Sytinskaja, 1930	192–Tashkent	1926-1926	62	0.757
20	microm, rel	Struve, 1928	536–Berlin	1927-1928	82	0.408
21	phot, rel	Steavenson, 1948, 1964	503–Cambridge	1947-1949	38	0.675
22	phot, rel	van Biesbroeck, 1970	711–McDonald	1948-1964	804	0.353
23	phot, rel	Whitaker, Greenberg, 1973	693–Tucson	1948-1973	133	0.246
24	phot, rel	Tomita, Soma, 1979	371–Tokyo-Okayama	1964-1977	155	1.090
25	phot, rel	van Biesbroeck et al., 1976	695–Kitt Peak, 693–Tucson	1966-1966	55	0.225
26	phot, rel	Walker et al., 1978; Harrington, Walker, 1984; Walker, Harrington, 1987	689–USNO, Flagstaff, 807–La Serena	1975-1986	653	0.216
27	phot, rel	Veillet, Ratier, 1980	586–Pic du Midi	1977-1979	58	0.154
28	phot, rel	Veillet, 1983b	586–Pic du Midi, 511–Haute Provence, 809–ESO La Silla, 568–Mauna Kea	1977-1982	1260	0.133
29	phot, abs	Debehogne et al., 1981	809–ESO La Silla	1980-1980	24	0.898
30	phot, rel	Veillet, 1983a	809–ESO La Silla, 586–Pic du Midi	1980-1981	112	0.157
31	CCD, rel	Pascu et al., 1987	687–Flagstaff	1981-1985	76	0.150
32	phot, rel	Veiga et al., 1987, 1994	874–Itajuba	1982-1988	2285	0.141

Таблица 9: Состав наблюдений и характеристики групп наблюдений. Здесь k – номер группы, N_k – количество наблюдений в группе, $\bar{\sigma}_k$ – среднеквадратическая величина остаточных невязок в группе, ΔT_k – период наблюдений. В столбце Тип указан тип наблюдений, и использованы следующие обозначения: rel - относительные, abs – абсолютные, microm – микрометрические, phot – фотографические, CCD – с помощью ПЗС-камеры, Voyager-2 – с космического аппарата Вояджер-2, phen – астрометрические результаты фотометрии взаимных покрытий и затмений, occ – для взаимных покрытий, ecl – для взаимных затмений, occ-P – по фотометрии взаимных покрытий определялся только позиционный угол. Перед названием обсерватории указан ее код по каталогу Международного Астрономического Союза, если он известен.

k	Тип	Публикация	Место наблюдений	ΔT_i	N_i	$\bar{\sigma}_k$
33	CCD, abs	Veiga et al., 2003	874-Itajuba	1982–1998	8518	0.293
34	Voyager-2	Jacobson, 1992	Voyager 2	1985–1986	445	0.026
35	phot, rel	Chanturiya et al., 2002	119-Abastuman	1987–1994	188	0.628
36	CCD, rel	Veiga, Vieira Martins, 1995, 1999	874-Itajuba	1989–1998	4258	0.076
37	phot, rel	Abrahamian, 1993	123-Byurakan	1990–1990	32	0.887
38	phot, abs	Yizhakevich et al., 1990	188-Majdanak	1990–1990	58	0.594
39	phot, rel	Jones et al., 1998	950-La Palma	1990–1991	514	0.065
40	CCD, abs	Stone, 2001; USNO, Planet. Ephemeris Data	689-Flagstaff	1998–2006	503	0.242
41	CCD, abs	Qiao et al., 2013	337-Sheshan, formerly Zo-Se	1998–2006	2358	0.138
42	CCD, rel	Communication to NSDB by Owen, 1999,2001	673-Wrightwood	1999–2001	15	0.276
43	CCD, abs	JPL Planetary Ephem. Data	689-USNO Flagstaff	1999–2005	396	0.250
44	CCD, rel	Communication to NSDB 2003	413-Siding Spring Observatory	2003–2003	6	0.130
45	CCD, abs	Veiga, Bourget, 2006	874-Itajuba	2004–2004	287	0.587
46	CCD, abs	Izmailov et al., 2007	B05-Barybino	2005–2005	20	0.175
47	CDD, rel	Izmailov et al., 2007	B05-Barybino	2005–2005	14	0.258
48	phen, occ-P	Arlot et al., 2013	См. в публикации	2007–2007	4	0.020
49	CCD, abs	Khovritchev, 2009	F65-Haleakala-Faulkes	2007–2007	29	0.152
50	phen, occ, ecl	Mallama et al., 2009; Arlot et al., 2013	См. в публикации	2007–2008	39	0.027
51	CCD, rel	Communication to NSDB by Kisseleva, 2009	084-Pulkovo	2007–2008	10	0.215
52	CCD, abs	Communication to NSDB by Kisseleva, 2009	084-Pulkovo	2007–2008	12	0.153

В таблице даны цитирования источников данных, а соответствующие ссылки приводятся в списке литературы. Несколько небольших порций наблюдений взяты из базы данных Natural Satellites Data Base (NSDB) (Arlot, Emelyanov, 2009). Эти наблюдения были переданы наблюдателями в NSDB без публикации данных. Такие данные помечены в Табл. 9 как Communication to NSDB без

ссылки на публикацию.

Исходя из информации о наблюдениях мы распределили их по группам так, как это представлено в Табл. 9. Всего имеем 52 группу наблюдений. Всем наблюдениям одной группы присвоен одинаковый вес, исходя из среднеквадратичной величины остаточных невязок в группе $\bar{\sigma}_k$, которые также даются в Табл. 9.

3.3 Уточнение параметров и оценки качества эфемерид

Согласно описанному выше методу и исходным данным выполнялось уточнение параметров движения пяти главных спутников Урана. Сначала уточнение было сделано в предположении равноточных наблюдений. По полученным невязкам были назначены веса группам наблюдений. Далее снова выполнялось уточнение параметров движения уже с учетом весов наблюдений. Снова вычислялись невязки и переназначались веса. Среднеквадратичные значения невязок по группам наблюдений приводятся в Таблице 9. По этим последним данным было выполнено окончательное уточнение параметров и созданы эфемериды спутников на интервале времени с 1787 по 2031 год.

Качество полученных эфемерид определяется несколькими условиями. Прежде всего мы должны иметь решение дифференциальных уравнений движения с точностью не хуже точности наблюдений. Это должно соблюдаться на всем интервале времени, для которого нам нужны эфемериды, включая интервал времени наблюдений. Для оценки точности численного интегрирования было выполнено интегрирование уравнений движения пяти спутников на интервале времени 250 лет вперед от момента первого наблюдения, а затем по полученным координатам и скорости на конечный момент времени было сделано интегрирование назад до начального момента. Результат интегрирования сравнивался с начальными условиями. Различия координат для ближайшего к планете спутника Миранды не превысили 0.7 км. Для остальных спутников различия оказались значительно меньше. На среднем геоцентрическом расстоянии Урана угловому расстоянию, равному 1 миллисекунде дуги, соответствует разность прямоугольных координат 15 км. Следовательно точность решения уравнений движения в топоцентрических угловых координатах составляет 0.5 мсек дуги, что оказывается значительно лучше точности использованных наблюдений.

Теперь ясно, что точность эфемерид определяется в первую очередь точно-

стью наблюдений и интервалом времени наблюдений. На точность эфемериды влияют также равномерность распределений наблюдений по времени и по орбите, а также правильность назначения весовых коэффициентов. Интервалы времени наблюдений для каждого спутника даны в Табл. 8, а среднеквадратичные величины невязок для каждой группы наблюдений – в Табл. 9. Распределение невязок всех наблюдений по времени для каждого спутника можно видеть на Рис. 1. Отдельно на Рис. 2 приводится распределение невязок по времени для наблюдений всех пяти спутников, выполненных космическим аппаратом Вояджер-2. Распределение наблюдений по орбитам оказывается достаточно равномерным, учитывая многочисленность наблюдений.

Показателем качества использованных наблюдений служит среднеквадратичная величина невязок по всем наблюдениям $\bar{\sigma}$. Вклады ошибок разных наблюдений в ошибку эфемериды оказываются различными, так как при уточнении параметров движения спутников мы назначали веса наблюдениям. Поэтому важным показателем точности наблюдений, учитывающим весовые коэффициенты, является величина $\bar{\sigma}_w$, определяемая как корень квадратный от средневзвешенной величины квадратов невязок всех наблюдений, т. е. вычисляемая по формуле

$$\bar{\sigma}_w = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N w_i \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^N w_i}} .$$

При уточнении орбит спутников по наблюдениям важным оказывается вопрос о том, какой критерий выбрать для отбрасывания грубых наблюдений. При уточнении параметров движения спутников для каждого наблюдения вычислялась невязка σ , равная угловому расстоянию на небесной сфере наблюденного положения спутника от вычисленного. Мы задавали некоторое граничное значение σ_{lim} , и все наблюдения, для которых невязка σ превышала это значение, отбрасывали. Первоначально значение σ_{lim} , как уже указано выше, бралось рав-

ным 5 сек. дуги. Если отбрасывать наблюдения по более строгому критерию, например, $\sigma_{lim} = 0.5$ сек. дуги, то будет отброшено слишком много наблюдений, которые несут информацию о движении спутников, и может сократиться интервал времени используемых наблюдений. При таком отбрасывании наблюдений можно получить параметры движения с весьма малыми формальными оценками ошибок, полученными по МНК, однако найденные параметры и эфемериды при этом могут отклоняться от истины на большую величину, чем в случае более полного состава наблюдений.

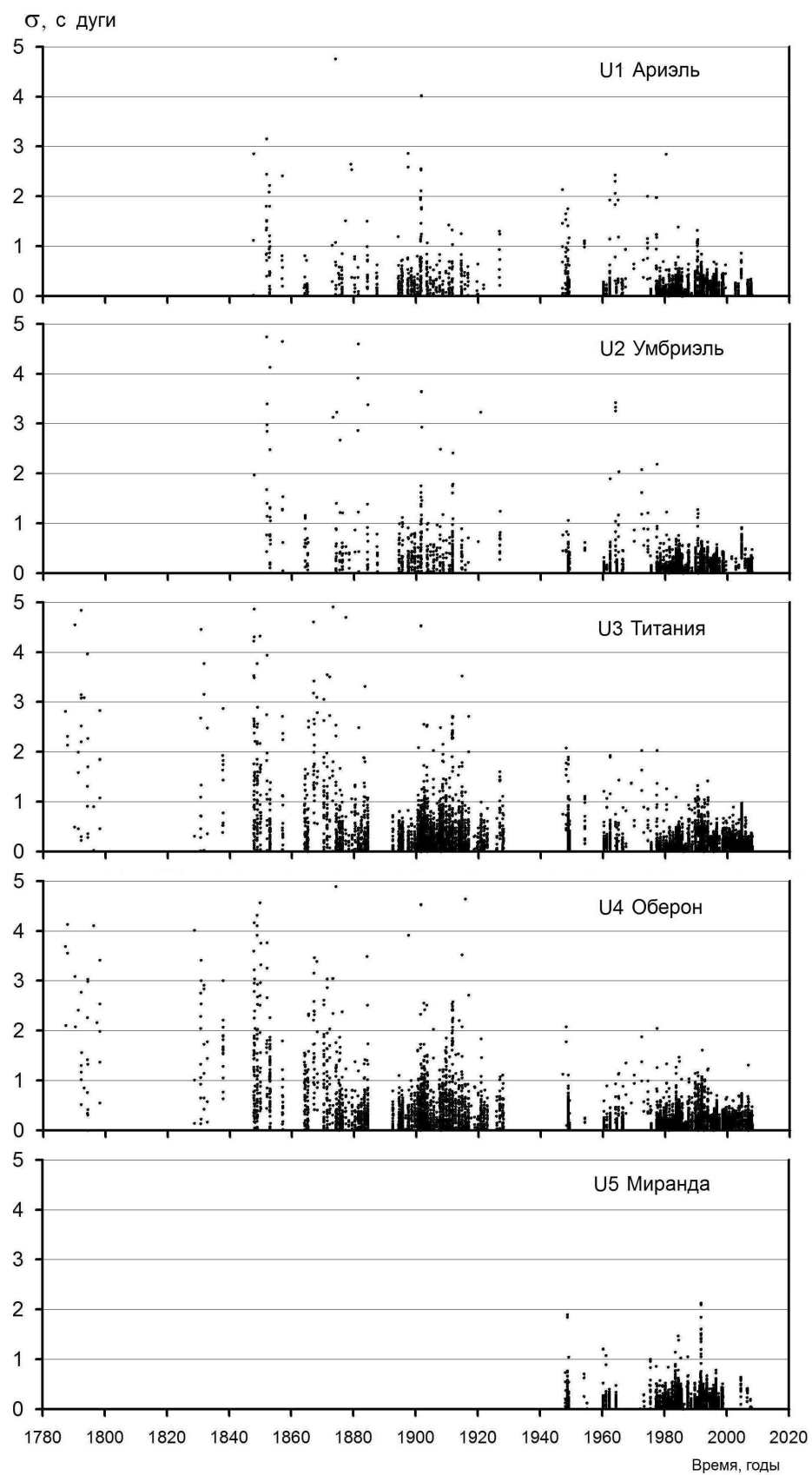


Рис. 1: Невязки наблюдений для каждого спутника.

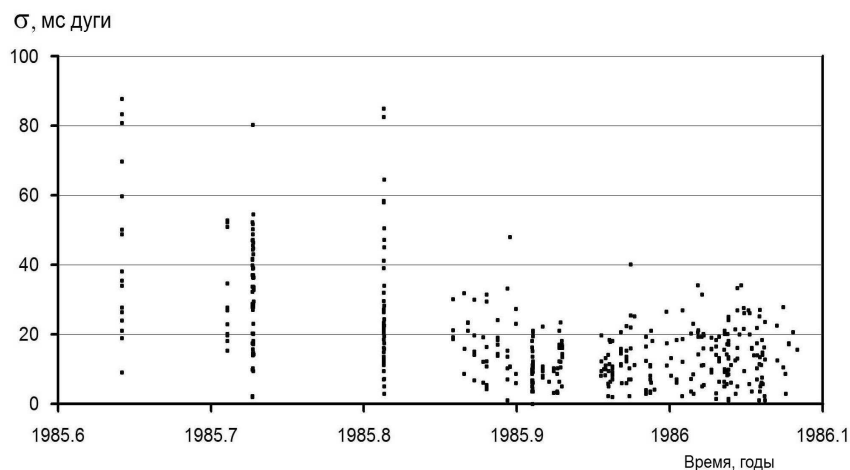


Рис. 2: Нормированные на геоцентрическое расстояние невязки наблюдений пяти спутников с космического аппарата Вояджер-2.

Теория вероятностей не дает нам точного критерия отбрасывания грубых наблюдений для получения наилучших оценок параметров. Здесь приходится поступать по наилучшему продуманному усмотрению. Мы попытались получить для этого дополнительную информацию, делая уточнение параметров движения спутников для разных значений критерия отбрасывания σ_{lim} . После отбраковки наблюдений для каждого σ_{lim} производилось перевычисление среднеквадратичных величин невязок по группам наблюдений и заново назначались весовые коэффициенты. Результаты представлены в Табл. 10. В этой таблице наблюдения одного спутника относительно другого включались в число наблюдений обоих спутников. В столбце Табл. 10 "Число использованных наблюдений" такие наблюдения учитывались один раз.

Заметим, что среднеквадратичные величины остаточных невязок в группах $\bar{\sigma}_k$, которые даются в Табл. 9, вычислены при $\sigma_{lim} = 5.0$ сек. дуги.

В Табл. 10 видно, что среднеквадратичные величины невязок наблюдений с учетом весовых коэффициентов $\bar{\sigma}_w$ почти не различаются для разных критериев отбрасывания наблюдений. Отметим, что оценки точности определения параметров движения спутников, полученные из ковариационной матрицы параметров, также мало различаются для разных вариантов σ_{lim} . Эти результаты

Таблица 10: Среднеквадратичные величины невязок наблюдений, полученные при разных критериях отбрасывания σ_{lim} . Невзвешенные значения $\bar{\sigma}$ и соответствующие значения с учетом весовых коэффициентов $\bar{\sigma}_w$ вычислены по наблюдениям всех пяти спутников вместе.

σ_{lim} , сек. дуги	Спутник	Интервал времени, наблю- дений, лет	Число наблю- дений спутников	Число исполь- зованных наблюдений	$\bar{\sigma}$, сек. дуги	$\bar{\sigma}_w$, сек. дуги
5.0	U1 Ариэль	160.3	5469	30139	0.430	0.121
	U2 Умбриэль	160.3	5510			
	U3 Титания	220.9	10077			
	U4 Оберон	220.9	15325			
	U5 Миранда	59.9	3997			
1.0	U1 Ариэль	156.2	5378	29229	0.270	0.117
	U2 Умбриэль	156.2	5423			
	U3 Титания	218.0	9705			
	U4 Оберон	215.8	14910			
	U5 Миранда	59.9	3971			
0.5	U1 Ариэль	156.1	5183	27063	0.203	0.109
	U2 Умбриэль	156.2	5185			
	U3 Титания	216.8	8712			
	U4 Оберон	215.8	13969			
	U5 Миранда	59.9	3839			

позволяют заключить, что для трех вариантов критерия отбрасывания наблюдений мы имеем примерно одинаковые формальные оценки точности определения параметров движения. Поскольку при $\sigma_{lim} = 5.0$ сек. дуги используется большее число наблюдений на больших интервалах времени, мы приняли решение взять этот вариант для производства окончательных эфемерид главных спутников Урана.

Уточнение параметров движения спутников при разных критериях отбрасывания наблюдений дает нам несколько вариантов эфемерид, полученных с одинаковой формальной точностью, но при разных составах использованных наблюдений. Сравнение таких вариантов эфемерид между собой дает возможность получить некоторые дополнительные оценки точности. Мы провели сравнение вариантов эфемерид, полученных при $\sigma_{lim} = 5.0$ сек. дуги и $\sigma_{lim} = 1.0$ сек. дуги на интервале времени с 1787 по 2031 гг. Для ряда моментов времени с постоянным шагом вычислялось угловое расстояние между геоцентрическими положениями спутника, полученными по двум сравниваемым эфемеридам. Результаты сравнения для каждого из пяти спутников показаны на Рис. 3. Видно, что на интервале времени с 2000 по 2031 год различия эфемерид не превышают 7 миллисекунд дуги.

Интересно сравнить наши новые эфемериды главных спутников Урана с эфемеридами, построенными ранее другими авторами. Мы провели такое сравнение с результатами работы (Lainey, 2008). Для этого с помощью сервера эфемерид естественных спутников планет MULTI-SAT (Emel'yanov, Arlot, 2008) были определены геоцентрические экваториальные координаты каждого спутника для ряда моментов времени на полном интервале времени, на котором построены эфемериды Lainey (2008). Затем для каждого такого положения спутников вычислялась невязка с нашими эфемеридами, аналогично невязкам наблюдений. При этом использовался наш окончательный вариант эфемерид при $\sigma_{lim} = 5.0$ сек. дуги. Полученные таким образом различия двух эфемерид для

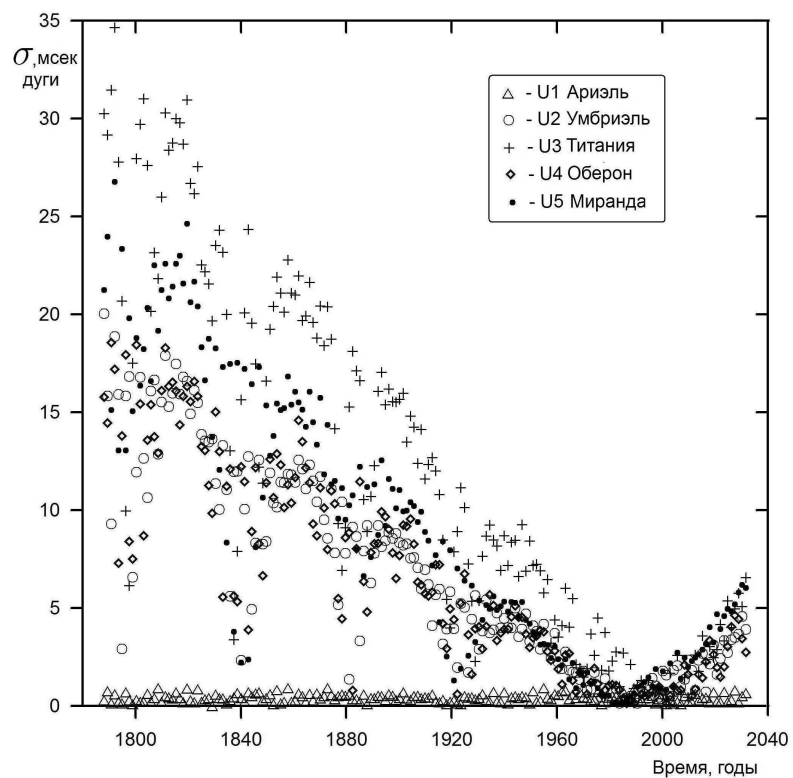


Рис. 3: Сравнение эфемерид, полученных при $\sigma_{lim} = 5.0$ и $\sigma_{lim} = 1.0$. По вертикальной оси отложено угловое расстояние между геоцентрическими положениями спутника, полученными по двум сравниваемым эфемеридам.

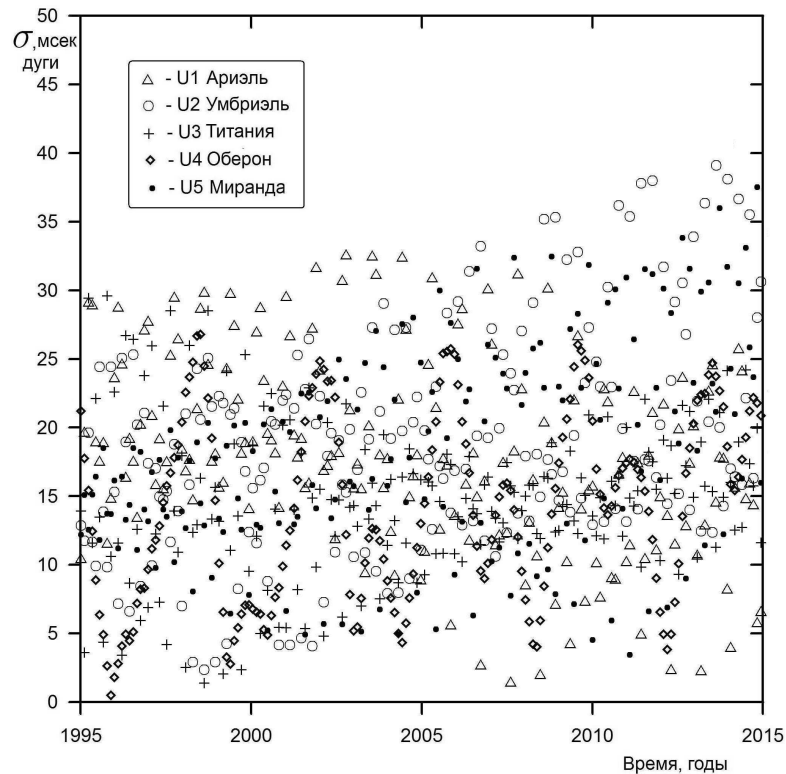


Рис. 4: Невязки эфемерид Lainey (2008) с эфемеридами настоящей работы по пяти спутникам.

всех пяти спутников показаны на Рис. 4.

Наиболее достоверные оценки точности эфемерид могут быть получены методами многократной вариации ошибок или состава наблюдений с последующими переуточнениями модели движения спутников, вычислениями эфемерид и определением дисперсий эфемерид на каждый интересующий нас момент времени. Это можно сделать аналогично тому, как это было выполнено в работах (Desmars и др., 2009; Emelyanov, 2010). Такую работу мы запланировали на будущее.

В некоторых практических задачах необходимо знать приближенные координаты спутников на больших интервалах времени. Для этой цели мы взяли простую модель движения – круговую орбиту в плоскости экватора планеты и определили наилучшие параметры этой модели по построенным эфемеридам на интервале времени 245 лет, включая интервал времени наблюдений.

Система координат для описания движения спутника используется плане-

тоцентрическая, основная плоскость – экватор планеты. Согласно решению Рабочей группы по картографическим координатам и элементам вращения Международного астрономического союза (Archinal, 2011) направлением северного полюса планеты считается то, которое составляет острый угол с направлением на северный полюс эклиптики. В случае Урана это направление имеет отрицательное склонение, а вращение планеты и орбитальное движение главных спутников в такой системе координат оказывается обратным. Это вызывает некоторое неудобство при описании движения спутников с помощью привычных в большинстве работ формул и параметров. Поэтому мы задаем движение спутников в планетоэкваториальной системе координат с положительным направлением оси z , совпадающим с направлением южного полюса Урана. Ось x направлена в восходящий узел этой системы координат по отношению к геоэкваториальной системе координат. В этой системе долготы главных спутников отсчитываются от этой оси и возрастают во времени.

Согласно упрощенной модели движения, как указано выше, спутник имеет постоянное расстояние до центра планеты a , движется вдоль экватора, а долгота, как функция времени, определяется соотношением

$$\lambda = \lambda_0 + N_0(t - t_0).$$

На основе построенных эфемерид мы определили параметры a , λ_0 , N_0 и периоды обращения спутников и приводим их значения в Табл. 11. Здесь время отсчитывается в шкале ТТ, а начальная эпоха t_0 выбрана равной JD 2445700.5. Упрощенная модель является приближенной, пренебрегается эксцентриситетами и наклонами орбит, однако такой эфемеридой можно пользоваться на весьма больших интервалах времени за пределами интервала времени наблюдений.

Таблица 11: Параметры упрощенной модели движения главных спутников Урана, вычисленные по построенным эфемеридам.

Спутник	a , км	λ_0 , рад.	N_0 , рад./сут	Период, сут
U1 Ариэль	190929.789657	4.19129041789	2.4929523362207	2.52037923705
U2 Умбриэль	265984.008927	2.55027481930	1.5161478527029	4.14417716318
U3 Титания	436281.937093	2.84893383786	0.7217183196095	8.70586922413
U4 Оберон	583449.534238	5.47451149964	0.4666920062040	13.46323747494
U5 Миранда	129848.114137	0.50830992724	4.4451905228990	1.41347941664

3.4 Определение орбитального замедления спутников

Главные спутники планет вызывают приливы в теле планеты. Если бы планеты были абсолютно упругими телами, приливы не изменяли бы энергии орбитального движения спутников. Однако вязкость вещества вызывает смещение приливной волны относительно направления на спутник. Это смещение создает дополнительную силу, действующую на спутник вдоль траектории его движения. Действие такой силы приводит к ускорению или замедлению орбитального движения. Возникает положительная или отрицательная диссипация механической энергии. В возмущениях орбитальной долготы появляется член, пропорциональный квадрату времени, а большая полуось приобретают линейное по времени изменение. Знак коэффициента квадратичного члена в долготе зависит от соотношения угловых скоростей вращения планеты и орбитального движения спутника. Если планета вращается быстрее спутника, как это имеет место в случаях Луны и главных спутников Урана, сила от приливов в теле планеты действует в направлении движения спутника, коэффициент при квадратичном члене в долготе отрицателен, большая полуось увеличивается. В случае, когда спутник вращается по орбите быстрее вращения планеты, коэффициент квадратичного изменения долготы имеет положительный знак. Это случай движения

спутника Марса Фобоса, он падает на Марс.

В работе (Laineу и др., 2009) исследовалось влияние приливов на орбитальное движение галилеевых спутников Юпитера. Коэффициенты квадратичного по времени изменения долгот спутников определялись по астрометрическим наблюдениям спутников совместно с уточнением параметров движения. Значительный прогресс в этом деле достигнут благодаря использованию астрометрических результатов фотометрических наблюдений взаимных покрытий и затмений спутников. Эти результаты имеют более высокую точность, чем прямые астрометрические наблюдения. По наблюдениям движения спутника Ио оказалось, что он имеет орбитальное ускорение, в то время как из-за приливов в теле Юпитера он должен проявлять орбитальное замедление, так как Юпитер вращается быстрее спутника. В работе (Laineу и др., 2009) найдено не только объяснение этого эффекта, но также получены оценки коэффициентов вязкости как планеты, так и спутника. Оказалось, что из-за приливов в теле самого спутника он теряет больше энергии, чем приобретает от приливов в теле вращающегося Юпитера.

Еще более сложная картина изменений механической энергии орбитального движения спутников оказалась в случае главных спутников Сатурна. Этому посвящена работа (Laineу и др., 2012). Обнаружилась сильная диссипация механической энергии орбитального движения спутников из-за приливов в теле Сатурна. При этом особый случай представляет движение спутника Энцелад.

Изучение диссипации механической энергии орбитального движения спутников представляет большой интерес, так как это служит определению физических параметров спутников и изучению тепловых балансов в их телах.

Ускорение или замедление орбитального движения спутника можно обнаружить из астрометрических наблюдений при достаточной точности и достаточно долгого интервала времени наблюдений. Для этого нужно ввести дополнительный параметр движения, характеризующий рассматриваемый эффект, и

уточнять его на основе наблюдений совместно с другими параметрами.

В случае аналитической теории движения спутников таким параметром может быть коэффициент $\hat{\lambda}$ квадратичного по времени члена в выражении для возмущений орбитальной долготы спутника

$$\delta\lambda = \hat{\lambda}(t - t_0)^2 ,$$

либо коэффициент \hat{n} при линейном по времени члене в возмущениях среднего движения

$$\delta n = \hat{n}(t - t_0) ,$$

либо коэффициент \hat{a} при линейном по времени члене в возмущениях большой полуоси орбиты

$$\delta a = \hat{a}(t - t_0) .$$

Здесь t – время, а t_0 – некоторый начальный момент времени.

При численном интегрировании уравнений движения влияние приливов можно приближенно учесть добавлением в правых частях уравнений возмущающего ускорения, направленного противоположно вектору скорости спутника, и имеющего компоненты

$$F_x = -\hat{k} \frac{V_x}{V}, \quad F_y = -\hat{k} \frac{V_y}{V}, \quad F_z = -\hat{k} \frac{V_z}{V},$$

где V_x, V_y, V_z – компоненты скорости спутника, V – модуль скорости, а \hat{k} – некоторый постоянный коэффициент. В этом случае коэффициент \hat{k} можно назвать коэффициентом торможения спутника, который может оказаться как положительным, так и отрицательным.

Из уравнений Ньютона относительно кеплеровых элементов (Дубошин, 1975) получаются следующие соотношения между рассмотренными выше коэффициентами:

$$\hat{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{\hat{k}}{a}, \quad \hat{n} = 3 \frac{\hat{k}}{a}, \quad \hat{a} = -2 \frac{\hat{k}}{n}.$$

К шести уточняемым параметрам движения каждого спутника мы добавили коэффициент торможения \hat{k}_i , где i – номер спутника. Начальные значения

коэффициентов торможения были заданы равными нулю. После уточнения всех параметров по всем наблюдениям были получены коэффициенты торможения для каждого спутника. Мы выполнили такие вычисления для трех вариантов критерия отбрасывания грубых наблюдений σ_{lim} . При этом весовые коэффициенты перевычислялись по каждому составу наблюдений заново, как это указано выше. Результаты определения коэффициента торможения для разных вариантов состава наблюдений представлены в Табл. 12. Формальные ошибки коэффициентов торможения \hat{k}_i , определенные по МНК, оказались весьма малыми. Для спутника Миранда ошибка равна 0.2×10^{-6} км/сут², для остальных спутников формальные ошибки не превышают 0.04×10^{-6} км/сут². Эти оценки, полученные по МНК, не отражают реальной точности определения коэффициентов торможения.

Заметим, что уменьшение среднеквадратичной величины невязок $\bar{\sigma}$ и соответствующего значения $\bar{\sigma}_w$ после добавления дополнительных уточняемых параметров произошло незначительное. При $\sigma_{lim} = 5.0''$ получилось, что $\bar{\sigma} = 0.430''$ и $\bar{\sigma}_w = 0.120''$, при $\sigma_{lim} = 1.0''$ имеем $\bar{\sigma} = 0.270''$, и $\bar{\sigma}_w = 0.116''$. В случае $\sigma_{lim} = 0.5''$ оказалось $\bar{\sigma} = 0.203''$ и $\bar{\sigma}_w = 0.108''$. Можно сравнить эти значения с теми, что даны в Табл. 10 – различия составляют около 1%. В подобных случаях уточняемые параметры сильно зависят от состава исходных наблюдений. Количество и длительность интервалов времени наблюдений оказались такими же, как и при уточнении параметров без коэффициентов торможения.

В качестве наиболее вероятных значений коэффициентов торможения мы взяли средние значения по трем вариантам, а погрешности значений вычислили как максимальные отклонения от среднего.

Как видно в Табл. 12, только для спутника Миранда коэффициент торможения определяется с точностью около 15%. Для остальных спутников точность ниже, однако найденные значения могут служить оценками, ограничивающими возможные значения коэффициента торможения.

Таблица 12: Коэффициенты торможения главных спутников Урана \hat{k} , полученные при разных критериях отбрасывания грубых наблюдений, и средние значения по трем вариантам. Погрешности (\pm) определены как максимальные отклонения от среднего значения в трех вариантах. Коэффициенты изменений долгот $\hat{\lambda}$ и больших полуосей орбит \hat{a} вычислены по средним значениям \hat{k} .

Спутник	$\hat{k} \times 10^6$ км/сут ²			Среднее	$\hat{\lambda}$	\hat{a}
	$\sigma_{lim} = 5.0''$	$\sigma_{lim} = 1.0''$	$\sigma_{lim} = 0.5''$	$\hat{k} \times 10^6$ км/сут ²	$\times 10^{11}$ сут ⁻²	$\times 10^6$ км/сут
U1 Ариэль	-0.70	-1.04	-0.73	-0.82 ± 0.22	-0.64 ± 0.11	0.66
U2 Умбриэль	-0.10	0.25	-0.60	-0.15 ± 0.45	-0.08 ± 0.24	0.20
U3 Титания	-0.89	-0.58	-1.06	-0.84 ± 0.26	-0.29 ± 0.09	2.33
U4 Оберон	-1.00	-1.25	-1.53	-1.26 ± 0.27	-0.32 ± 0.07	5.40
U5 Миранда	-5.60	-6.49	-7.55	-6.55 ± 1.00	-7.56 ± 1.15	2.95

Коэффициенты торможения для всех пяти спутников получились отрицательными. Это говорит о том, что спутники испытывают "отрицательное торможение". Приливы в теле Урана, который вращается быстрее спутников, передают им дополнительную механическую энергию. В результате спутники замедляют свое орбитальное движение, удаляясь от планеты.

Учет торможения в движении спутника должен приводить к лучшему согласованию модели движения с наблюдениями. В результате мы можем получить более точные эфемериды. Эфемерида спутника, построенная на основе наблюдений с учетом торможения спутника, будет отличаться от эфемериды построенной без учета этого эффекта. Эти отличия необходимо оценить. Мы определили невязки топоцентрических положений спутников между двумя исследуемыми эфемеридами для ряда моментов времени. При этом в обоих случаях использовался один и тот же набор наблюдений (30139 наблюденных положений). Для спутника U5 Миранда вычисления сделаны на интервале времени с

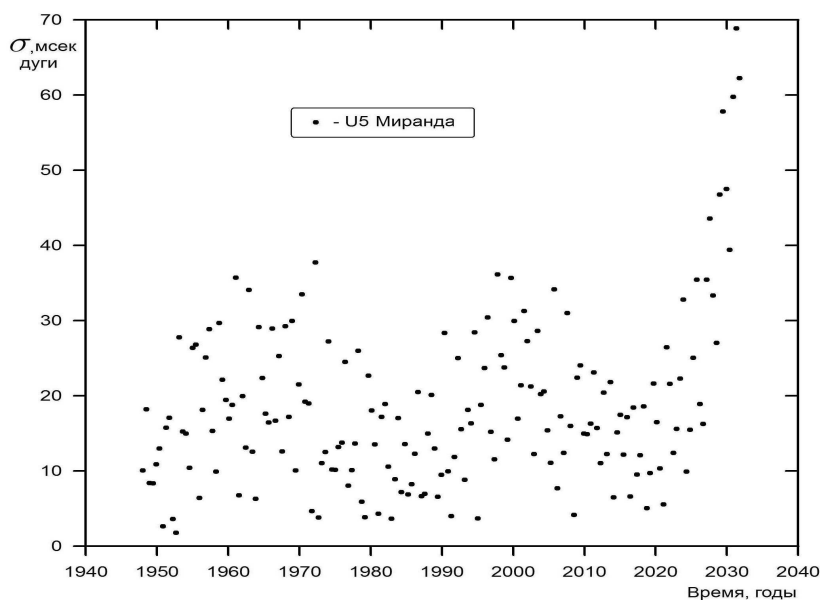


Рис. 5: Разности между топоцентрическими положениями спутника U5 Миранда по эфемеридам, построенным с учетом квадратичного по времени изменения долготы, и по эфемеридам без учета этого эффекта.

1948 по 2031 год и показаны на Рис. 5. Для остальных четырех спутников такое сравнение сделано на интервале времени с 1788 по 2031 год, результаты даны на Рис. 6. На рисунках видно, что различия в положениях спутников превышают сделанные выше оценки погрешности эфемерид. Эти различия превосходят также уровень точности современных наблюдений. Следовательно при производстве эфемерид главных спутников Урана на основе наблюдений необходимо учитывать эффект векового замедления орбитального движения спутников.

Как обсуждалось ранее в данном параграфе, диссипативные эффекты в системе спутников Урана приводят к возмущениям в элементах орбит спутников. В выражении для орбитальной долготы появляется квадратичный по времени член, а в выражениях для среднего движения и большой полуоси - линейные по времени члены. При вычислении короткопериодических возмущений в долготах спутников Урана, обусловленных их взаимным притяжением, в выражениях для этих возмущений могут появляться малые знаменатели из-за соотношений между средними движениями, близких к соизмеримостям. Такие соизмеримости

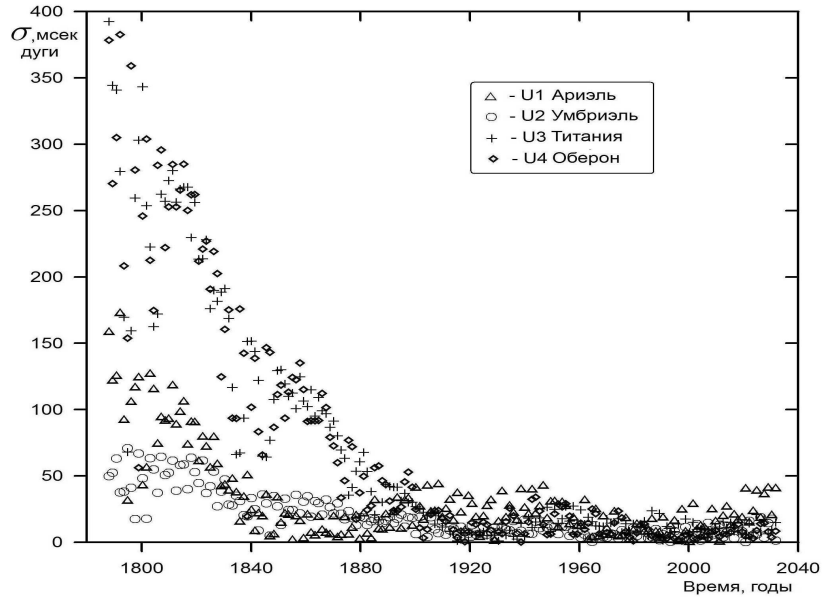


Рис. 6: Разности между топоцентрическими положениями спутников по эфемеридам, построенным с учетом квадратичного по времени изменения долготы, и по эфемеридам без учета этого эффекта.

ассоциируются с резонансными возмущениями (Мюррей, Дермотт, 2009). Из-за диссипативных эффектов средние движения спутников изменяются во времени. В некоторые моменты могут наступать точные соизмеримости. Тогда вычисление короткопериодических возмущений в долготе становится проблематичным. На основе полученных нами параметров линейных по времени изменений средних движений можно оценить такие моменты.

В работе (Laskar, 1986) найдены короткопериодические возмущения второго порядка в долготах спутников Урана Миранда, Ариэль и Умбриэль, имеющие значительную амплитуду из-за соотношения между средними движениями трех спутников, близком к соизмеримости. Аргумент под знаком синуса для этих членов возмущений имеет следующий вид:

$$(N_1 - 3N_2 + 2N_3)t + \phi,$$

где N_1, N_2, N_3 - средние движения для Миранды, Ариэль и Умбриэль, соответственно, ϕ - начальная фаза на начальный момент времени t_0 , а t - время прошедшее с момента t_0 . Фактически, выражение $(N_1 - 3N_2 + 2N_3)$ можно рас-

сма́тривать как частоту данного возмущения. При интегрировании уравнений движения спутников это выражение перешло в знаменатель, что привело к значительной амплитуде.

Согласно нашей упрощенной модели движения, описанной выше, и численными значениями для средних движений Миранды, Ариэль и Умбриэль, взятых из Табл. 11, на момент начальной эпохи $t_0 = 2445700.5(JD)$ частота данного возмущения составляет приблизительно -0.00137 рад./сутки. При учете векового замедления орбитального движения спутников, исследуемого в данном параграфе, данная частота не будет постоянной величиной. В такой-то момент времени ее значение может стать равным нулю, что приведет к "обнулению" знаменателя в члене решения уравнений движения спутников, обусловленным данным возмущением.

Вычислим момент "обнуления" данного знаменателя с учетом линейных членов в среднем движении данных спутников из-за диссипативных эффектов. Для частоты исследуемого короткопериодического возмущения, как функции времени, мы имеем следующее выражение:

$$(N_1 - 3N_2 + 2N_3) + 2(\hat{\lambda}_1 - 3\hat{\lambda}_2 + 2\hat{\lambda}_3)(t - t_0).$$

Приравнявая это выражение нулю, и подставляя в него значения параметров из Табл. 11 и Табл. 12, получим искомый момент времени. В итоге мы нашли, что знаменатель описанного выше возмущения принимает нулевое значение в прошлом для момента времени, отстоящего от начальной эпохи t_0 на 11817072.05 суток назад, что составляет примерно 32353 года. Следует сразу же отметить, что все эти вычисления носят лишь оценочный характер, тем не менее, диссипативные эффекты могут привести существенному росту амплитуд короткопериодических возмущений в долготях спутников из-за появления малых знаменателей.

Заключение и выводы

В результате выполнения диссертационной работы получены следующие новые результаты.

- Построена новая теория вековых возмущений движения спутников сжатой планеты, в которой учитываются члены четвертой степени относительно малых эксцентриситетов и наклонов орбит в разложении возмущающей функции. Тем самым классическая теория вековых возмущений Лагранжа-Лапласа существенно уточнена. Эти результаты ценны и полезны для будущих построений аналитической теории движения спутников и изучения эволюции орбит.
- Разработана новая модель движения пяти главных спутников Урана, основанная на всех опубликованных наблюдениях с моментов их открытий до 2008 года. Для спутников Титания и Оберон это период 220 лет, для спутников Ариэль и Умбриэль – 160 лет, для Миранды – 60 лет. Для уточнения параметров движения спутников использованы 30139 наблюдений, включая наблюдения с космического аппарата Вояджер-2, а также астрометрические результаты фотометрических наблюдений взаимных покрытий и затмений главных спутников Урана в 2007-2008 годах. Модель построена путем численного интегрирования уравнений движения с учетом всех необходимых возмущений. Среднеквадратичная величина остаточных отклонений наблюдаемых геоцентрических положений спутников от их эфемеридных положений составляет 0.43 сек. дуги. С учетом весовых коэффициентов наблюдений эта величина оказалось равной 0.12 сек. дуги.
- На основе новой модели созданы эфемериды главных спутников Урана на интервале времени с 1787 по 2031 год. Эфемериды включены в сервер эфемерид MULTI-SAT, обеспечивающий доступ к эфемеридам через интернет.

- Определены параметры диссипации механической энергии движения спутников из наблюдений. Диссипация может быть вызвана приливами планеты и приливами в телах спутников. Получены приближенные значения коэффициентов квадратичного по времени изменения орбитальной долготы спутников. Эти значения оказались равными $-(0.64 \pm 0.11) \times 10^{-11}$ рад./сут² для спутника Ариэль, $-(0.08 \pm 0.24) \times 10^{-11}$ рад./сут² для спутника Умбриэль, $-(0.29 \pm 0.09) \times 10^{-11}$ рад./сут² для спутника Титания, $-(0.32 \pm 0.07) \times 10^{-11}$ рад./сут² для спутника Оберон и $-(7.56 \pm 1.15) \times 10^{-11}$ рад./сут² для Миранды. Найденные параметры показывают замедление орбитального движения спутников, что соответствует влиянию приливов в теле Урана, который вращается быстрее спутников. Точность определения параметров орбитального замедления не высока, однако сделанные оценки могут служить ограничениями на их возможные значения.

Сравнение эфемерид, построенных с учетом векового замедления орбитального движения главных спутников Урана, с эфемеридами, построенными без учета этого эффекта, показывает необходимость учета диссипации механической энергии движения спутников.

На основе проделанной работы и полученных результатов можно сделать следующие выводы.

- Выведенные в диссертации возмущения от дополнительных членов в вековой части возмущающей функции вносит существенный вклад в эволюцию орбит спутников Урана, прежде всего Миранды, на больших интервалах времени. На интервалах времени больше 100 лет вклад полученных дополнительных вековых возмущений для спутника Миранда имеет порядок величины эксцентриситета орбиты, что в линейной мере составляет несколько тысяч километров. Для других спутников эффект учета нелинейных членов оказывается меньшим.

- Построенная новая модель движения главных спутников Урана обеспечивает прогресс в точности эфемерид этих спутников за счет использования более широкого набора наблюдений по сравнению с предшествующими работами других авторов.
- Оценки точности эфемерид главных спутников Урана до сих пор никем не делались. Наши приближенные оценки показывают, что погрешность построенных эфемерид спутников монотонно и почти линейно возрастает от минимального значения в 1990 году до 7 мсек дуги к 2031 году.
- Сравнение новых построенных эфемерид с результатами последней из аналогичных работ других авторов (Laineu, 2008) показывает согласование в пределах 0.04 сек дуги на интервале времени 1995-2015 гг.
- Точность определения из наблюдений параметров диссипации механической энергии движения спутников оказалась низкой. Наилучший по точности результат получен для спутника Миранда – коэффициент при квадратичном по времени члене в долготе спутника определен с точностью 15%. Однако уверенно можно утверждать, что все пять спутников испытывают вековое замедление изменения средней орбитальной долготы и удаляются от планеты. Это соответствует влиянию приливов в теле Урана, который вращается быстрее спутников.
- Сравнение эфемерид, построенных с учетом векового замедления орбитального движения главных спутников Урана, с эфемеридами, построенными без учета этого эффекта, показывает необходимость учета диссипации механической энергии движения спутников при создании эфемерид.

Работа выполнялась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-02-00294).

В заключение автор считает приятным долгом выразить **признательность** своему научному руководителю **Емельянову Н.В.** за постоянную под-

держку в работе, внимательное отношение и ценные советы.

Список литературы

- Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В. О разложении вековой части возмущающей функции взаимного притяжения в спутниковой системе планеты. *Астрономический вестник*. 2013. Т. 47. С. 32-39.
- Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. Учебник для студентов университетов, обучающихся по специальности "Астрономия". Издание 3-е, дополненное. Наука. Москва. 1975. С.1-800.
- Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы. М.:Физматлит. 2009.
- Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука. 1968.
- Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, Физматлит. 1975.
- Abrahamian H. V., Gigoian K., Kisselev A. A., Kisseleva T. P., Shakht N. A. Positional photographic observations of Saturn, Uranus, Neptune, their satellites and Pluto in 1990 with the telescope ZTA-2.6 m at Byurakan in Armenia. *Astronomical and Astrophysical Transactions*. 1993. V. 3. P. 279-285.
- Aitken R. G. Observations of the satellites of Uranus. *Astronomical Journal*. 1898. V. 19. P. 76-77.
- Aitken R. G. Measures of the Satellites of Uranus in 1899. *Astronomische Nachrichten*. 1899. V. 151. No. 3607. P. 105-108.
- Aitken R. G. Observations of the satellites of Uranus in 1900 and 1901. Lick Observatory, University of California. Bulletin no. 7. 1901. No. 7. P. 36-39.
- Aitken R. G. Observations of the satellites of Uranus in 1903. Lick Observatory bulletins. 1904. No. 51. P. 160-161.

- Aitken R. G. Observations of the satellites of Uranus in 1904 and 1905. Lick Observatory bulletin. 1905. V. 4. No. 94. P. 31-32
- Aitken R. G. Observations of the satellites of Mars, Saturn and Uranus. Lick Observatory bulletin. 1909. V. 5. No. 172. P. 169-173
- Aitken R. G. Measures of the satellites of Uranus in 1910 and 1911. Lick Observatory bulletin. 1912. V. 7. No. 207. P. 1-2
- Aitken R. G. Measures of the satellites of Uranus in 1914. Lick Observatory bulletin. 1913. V. 8. P. 142-143
- Aoki S., Soma M., Kinoshita H., Inoue K. Conversion matrix of epoch B 1950.0 FK 4-based positions of stars to epoch J2000.0 positions in accordance with the new IAU resolutions. Astronomy and Astrophysics. 1983. V. 129. P. 263-267.
- Archinal B. A., A'Hearn M. F., Bowell E., Conrad A., Consolmagno G. J., Courtin R., Fukushima T., Hestroffer D., Hilton J.L., Krasinsky G.A., and 7 coauthors. Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2009. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2011. V. 109. P. 101-135.
- Arlot J.-E., Emelyanov N. V. The NSDB natural satellites astrometric database. Astronomy and Astrophysics. 2009. V. 503. P. 631-638.
- Arlot J.-E., Emelyanov N. V., Aslan Z., Bel J. and 25 co-authors. Astrometric results of observations of mutual occultations and eclipses of the Uranian satellites in 2007. Astronomy and Astrophysics. 2013. V. . P. - .
- Asten von E. Resultate aus Otto von Struve's beobachtungen der Uranustrabanten. Memoires de l'Academie Imperiale des sciences de St.-Petersbourg, VII serie. 1872. V. 18. No. 5. P. 1-26.

- Barnard E. E. Micrometrical observations of the four satellites of the planet Uranus, and measures of the diameters of Uranus. *Astronomical Journal*. 1896. V. 16. No. 370. P. 73-78.
- Barnard E. E. Observations of the satellites of Uranus. *Astronomical Journal*. 1909. V. 26. No. 606. P. 47-50.
- Barnard E. E. Observations of the satellites of Uranus. *Astronomical Journal*. 1912. V. 27. No. 637. P. 104-106.
- Barnard E. E. Observations of the satellites of Uranus. *Astronomical Journal*. 1915. V. 29. No. 677. P. 39-40.
- Barnard E. E. Observations of the satellites of Uranus. *Astronomical Journal*. 1916. V. 30. No. 699. P. 20-21.
- Barnard E. E. Observations of the satellites of Uranus. *Astronomical Journal*. 1919. V. 32. No. 758. P. 105-107.
- Barnard E. E. Observations of the satellites of Uranus (prepared for publication by Mary R. Calvert). *Astronomical Journal*. 1927. V. 37. No. 879. P. 125-127.
- Belikov M. V. Methods of numerical integration with uniform and mean square approximation for solving problems of ephemeris astronomy and satellite geodesy. *Manuscr. Geod.* 1993. V. 18. No. 4. P. 182-200.
- Carlsberg meridian catalogues la Palma. (1999) Numbers 1 to 11. Observations of positions of stars and planets May 1984 to May 1998. Copenhagen University Observatory, Royal Greenwich Observatory, Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando. 1999.
- Chanturiya S.M., Kisseleva T.P., Emelianov N.V. The photographic positional observations of Uranus and their satellites Titania and Oberon in Abastumani

- in 1987-1994. Pulkovo, Glavnaia Astronomicheskaiia Observatoriia, Izvestiia. 2002. No. 216. P. 349-362.
- Christou A., Murray C. A second order Laplace-Lagrange theory applied to the uranian satellite system. *Astron. Astrophys.* 1997. V. 327. P. 416–427.
- Davis C. H. Observations of the Satellites of Neptune and Uranus, made with the 26-inch Equatorial of the U.S. Naval Observatory. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* 1874. V. 35. P. 49-55.
- Debehogne H., Freitas-Mourao R. R., Vieira G. Positions of Uranus and four satellites in 1980 obtained at ESO La-Silla. *Acta Astronomica.* 1981. V. 31. P. 391-392.
- Desmars J., Arlot S., Arlot J.-E., Lainey V., Vienne A. Estimating the accuracy of satellite ephemerides using the bootstrap method. *Astronomy and Astrophysics.* 2009. V. 499. P. 321–330.
- Dinwiddie W. W. Observations of the satellites of Uranus. *Astronomical Journal.* 1904. V. 24. No. 555. P. 26-26.
- Ellis K.M., Murray C.D. The disturbing function in solar system dynamics. *Icarus.* 2000. V. 147, P. 129-144.
- Emel'yanov N. V., Arlot J.-E. The natural satellites ephemerides facility MULTI-SAT. *Astronomy and Astrophysics.* 2008. V. 487. P. 759–765.
- Emelyanov N. Precision of the ephemerides of outer planetary satellites. *Planetary and Space Science.* 2010. V. 58. P. 411-420.
- Eppes J. B. Observations of the satellites of Uranus, with corrections to the elements of Oberon and Titania. *Astronomical Journal.* 1913. V. 27. No. 648. P. 188-191.
- Everhart E. An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings. 1985. *ASSL Vol. 115: IAU Colloq. 83: Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution, 1985.*

- Feissel M., Mignard F. The adoption of ICRS on 1 January 1998: meaning and consequences. *Astronomy and Astrophysics*. 1998. V. 331. P. L33-L36.
- Fienga A., Laskar J., Kuchynka P., Manche H., Desvignes G., Gastineau M., Cognard I., Theureau G. The INPOP10a planetary ephemeris and its applications in fundamental physics. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2011. V. 111. P. 363-385.
- Frederick C. W., Hammond J. C. Observations of the Satellites of Saturn and Uranus in 1904. *Astronomische Nachrichten*. 1905. V. 168. P. 277-284.
- Frederickson M. Observations of the satellites of Uranus in 1907. *Astronomical Journal*. 1908. V. 26. No. 602. P. 17-17.
- French R. G., Elliot J. L., French L. M., Kangas J. A. et al. Uranian ring orbits from earth-based and Voyager occultation observations. *Icarus*. 1988. V. 73, P. 349–378.
- Giorgini J. D., Yeomans D. K., Chamberlin A. B., Chodas P. W., Jacobson R. A., Keesey M. S., Lieske J. H., Ostro S. J., Standish E. M., Wimberly R. N. JPL's On-Line Solar System Data Service. 1996. *BAAS*. V. 28. No. 25.04.
- Hall Asaph Jr. Observations of the Satellites of Neptune and Uranus. *Astronomische Nachrichten*. 1876. V. 88. P. 131-138.
- Hall Asaph Jr. Observations made with the 26 inch Refractor of the U.S. Naval Observatory, at Washington. *Astronomische Nachrichten*. 1877. V. 90. P. 161-166.
- Hall Asaph Jr. Observations with the 26 inch Refractor of the Naval Observatory, at Washington. *Astronomische Nachrichten*. 1878. V. 93. P. 65-70.
- Hall Asaph Jr. Observations and orbit-elements of Oberon and Titania, satellites of Uranus. *Astronomical Journal*. 1911. V. 27. No. 627. P. 17-19.
- Hall Asaph Jr. Observations of the satellites of Uranus. *Astronomical Journal*. 1921. V. 34. No. 793. P. 5-6.

- Hall Asaph Jr. Observations of the satellites of Uranus, 1921. *Astronomical Journal*. 1922. V. 34. No. 802. P. 92-92.
- Hall Asaph Jr., Bower E. C. Observations of satellites of Uranus, 1922. *Astronomical Journal*. 1923. V. 35. No. 830. P. 116-116.
- Hall Asaph Jr. Equatorial observations, 1908-1926. *Publications of the United States Naval Observatory*. 1929. 2nd ser. V. 12.
- Hammond J. C. Equatorial observations, 1893-1907. *Publications of the United States Naval Observatory*. 1911. 2nd ser. V. 6.
- Harrington R. S., Walker R. L. Positions of planets and natural satellites. II. *Astronomical Journal*. 1984. V. 89. P. 889-898.
- Henry Paul and Henry Prosper. Observations faites a l'observatoire de Paris (equatorial de 0.38 m; tour de l'Est). *Bulletin Astronomique*. 1884a. V. 1. P. 89-90.
- Henry Paul and Henry Prosper. Observations faites a l'observatoire de Paris (equatorial de 0.38 m; tour de l'Est). *Bulletin Astronomique*. 1884b. V. 1. P. 178-179.
- Henry Paul and Henry Prosper. Observations faites a l'observatoire de Paris (equatorial de 0.38 m; tour de l'Est). *Bulletin Astronomique*. 1884c. V. 1. P. 329-330.
- Henry Paul and Henry Prosper. Observations faites a l'observatoire de Paris (equatorial de 0.38 m; tour de l'Est). *Bulletin Astronomique*. 1884d. V. 1. P. 488-493.
- Herschel J. F. W. On the Satellites of Uranus. *Memoirs of the Royal Astronomical Society*. 1835. V. 8. P. 1-24.

- Holden E. Results of observations of the satellites of Uranus. *Astronomical and Meteorological Observations made at the U.S. Naval Observatory*. 1881. V. 17. P. 230-230.
- Hough G. W. Observations of the Satellites of Uranus, made at the Dearborn Observatory. *Astronomische Nachrichten*. 1881. V. 98. P. 25-28.
- Hussey W. J. Micrometrical observations of the satellites of Saturn; Observations of the satellites of Uranus and Neptune. *Lick Observatory Bulletin*. 1902. V. 17. P. 139.
- Izmailov I. S., Korotkii S. A., Ereshko M. V., Stepura A. V. Astrometric Observations of the Second, Third, and Fourth Satellites of Uranus. *Solar System Research*. 2007. V. 41. P. 42-45.
- Jacobson R. A. Astrographic observations of the major Uranian satellites from Voyager 2. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*. 1992. V. 96. P. 549-563.
- Jacobson R. A., Campbell J. K., Taylor A. H., Synnott S. P. The masses of Uranus and its major satellites from Voyager tracking data and earth-based Uranian satellite data. *Astronomical Journal*. 1992. V. 103. P. 2068-2078.
- Jones D. H. P., Taylor D. B., and Williams I. P. Astrometry of satellites I to V of Uranus 1990-1991. *Astronomy and Astrophysics Supplement*. 1998. V. 130. P. 77-80.
- Khovritchev M. Yu. Astrometric observations of the Uranian satellites with the Faulkes Telescope North in 2007 September. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2009. V. 393. P. 1353–1358.
- Lainey V. A new dynamical model for the Uranian satellites. *Planet. and Space Sci.* 2008. V. 56. P. 1766-1772.

- Lainey V., Arlot J.-E., Karatekin O., van Hoolst T. Strong tidal dissipation in Io and Jupiter from astrometric observations. *Nature*. 2009. V. 459. Issue 7249. P. 957-959.
- Lainey V., Karatekin O., Desmars J., Charnoz S., Arlot J.-E., Emelyanov N., Le Poncin-Lafitte Chr., Mathis S., Remus F., Tobie G., Zahn J.-P. Strong tidal dissipation in Saturn and constraints on Enceladus' thermal state from astrometry. *The Astrophysical Journal*. 2012. V. 752. Issue 1. Article id. 14 (2012).
- Lamont J. Value of the Mass of Uranus, deduced from Observations of its Satellites, made at the Royal Observatory of Munich during the year 1837. *Memoirs of the Royal Astronomical Society*. 1840. V. 11. P. 51-60.
- Laskar J. A general theory for the Uranian satellites. *Astron. Astrophys.* 1986. V. 166. P. 349-358.
- Laskar J., Jacobson R.A. GUST86 — an analytical ephemeris of the Uranian satellites. *Astron. Astrophys.* 1987. V. 188. P. 212–224.
- Lassel W. Satellites of Uranus. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1847. V. 8. P. 43-44.
- Lassel W. Schreiben des Herrn Lassel an den Herausgeber. *Astronomische Nachrichten*. 1848a. V. 27. P. 41-42.
- Lassel W. Satellites of Uranus. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1848b. V. 9. P. 105-105.
- Lassel W. Observations of the Satellites of Uranus. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1849. V. 10. P. 7-7.
- Lassel W. Bright Satellites of Uranus. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1850. V. 10. P. 135-135.

- Lassel W. On the interior satellites of Uranus. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1851. V. 12. P. 15-17.
- Lassel W. Beobachtungen der Uranus-Satelliten. *Astronomische Nachrichten*. 1852a. V. 34. P. 325-328.
- Lassel W. (1852) Observations of the satellites of Uranus with the 20-foot equatoreal. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1852b. V. 12. P. 152-152.
- Lassel W. Observations of the Satellites of Uranus. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1853. V. 13. P. 147-151.
- Lassel W. Observations of the Satellites of Uranus. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1857. V. 17. P. 175-176.
- Lassel W. Observations of the Satellite of Neptune, and of the Satellites of Uranus. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1864. V. 24. P. 209-210.
- Lassel W. Observations of Planets and Nebulae at Malta. *Memoirs of the Royal astronomical society*. 1867. V. 26. P. 1-32.
- Malhotra R., Fox K., Murray C., Nicholson P. 1989. Secular perturbations of the uranian satellites: Theory and practice. *Astron. Astrophys.* 1989. V. 221. P. 348-358.
- Mallama A., Soma M., Sada P. V., Modic R. J., Ellington C. K. Astrometry of Iapetus, Ariel, Umbriel, and Titania from eclipses and occultations. *Icarus*. 2009. V. 200. P. 265-270.
- Mulholland J.D., Shelus P.J., Jefferys W.H., Benedict G.F. Outer planet satellite studies. In: *Natural and Artificial Satellites Motion*. Ed. by Paul E. Nacozy and Sylvio Ferraz-Mello. University of Texas Press. Austin and London. 1979. P. 39-48.
- Nicholson S. B. Photographic measures of the satellites of Uranus. *Lick Observatory Bulletin*. 1915. V. 8. P. 143-144.

- Pascu D., Seidelmann P. K., Schmidt R. E., Santoro E. J., Hershey J. L. Astrometric CCD observations of Miranda - 1981-1985. *Astronomical Journal*. 1987. V. 93. P. 963-967.
- Perrotin M. Observations des satellites Hyperion, Ariel, Umbriel et du satellite de Neptune faites a l'observatoire de Nice. *Bulletin Astronomique*. 1887. V. 4. P. 339-340.
- Qiao R.C., Cheng X., Dourneau G., Xi X.J., Zhang H.Y., Tang Z.H., Shen K.X. CCD astrometric observations of the five major Uranian satellites made in 1998–2007 and comparison with theory. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2013. V. 428. P. 2755–2764.
- Rosanof A. Beobachtungen des Uranusmonde aus photographischem Wege. *Astronomische Nachrichten*. 1925. V. 224. No. 5376. P. 409-418.
- Rosse Earl Of. Observations of the satellites of the planet Uranus made at Birr Castle, during the years 1872, 1873, and 1874. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1875. V. 35. P. 300-304.
- Rush B., Jacobson R. A. Orbits of the Major Uranian Satellites by Numerical Integration, Fit to Earth-Based and Voyager Observations. *American Astronomical Society, DDA meeting*. 2007. V. 38. No. 13.05.
- See T. J. J. Observations of Titania and Oberon, the two outer Satellites of Uranus. *Astronomische Nachrichten*. 1901. V. 154. P. 87-92.
- See T. J. J. Observations of the Satellites of Saturn and Uranus. *Astronomische Nachrichten*. 1902. V. 159. P. 213-226.
- See T. J. J. Observations of the Satellites of Uranus in 1902. *Astronomische Nachrichten*. 1907. V. 176. P. 293-298.
- Schaeberle J. M. Micrometric measures of the two outer satellites of Uranus, and of the satellite of Neptune. *Astronomical Journal*. 1895. V. 15. No. 340. P. 25-26.

- Schaeberle J. M. Observations of the satellites of Uranus. *Astronomical Journal*. 1897. V. 18. No. 409. P. 5-6.
- Soulie G. Positions de grosses planetes et de leurs satellite et de la Lune. *Journal des Observateurs*. 1968. V.51. P. 315-325.
- Soulie G. Positions de grosses planetes et de la Lune observees a l'equatorial photographique de 0,33 m. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*. 1972. V. 6. P. 311-326.
- Soulie G. Positions of the major planets and the moon observed at the photographic equatorial of 0.33 m. In french. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*. 1975. V. 22. P. 49-61.
- Soulie G. Positions of asteroids, major planets, and the moon. In french. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*. 1978. V. 33. P. 257-264.
- Steavenson W. H. Observations of the Satellites of Uranus. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1948. V. 108. P. 183-185.
- Steavenson W. H. The satellites of Uranus. *The journal of the British Astronomical Association*. 1964. V. 74. No. 1. P. 54-59.
- Stone R. C. Positions for the outer planets and many of their satellites IV: FASTT observations taken in 1999-2000. *The Astronomical Journal*. 2000. V. 120. P. 2124-2130.
- Stone R. C. Positions for the Outer Planets and Many of Their Satellites. V. FASTT Observations Taken in 2000-2001. *The Astronomical Journal*. 2001. V. 122. No. 5. P. 2723-2733.
- Struve G. Mikrometermessungen der Uranustrabanten Oberon und Titania im Jahre 1927. *Astronomische Nachrichten*. 1928. V. 233. P. 281-286.

Sytinskaja N. N. Photographic observations of Uranus satellites in 1926. Publications of the Tashkent astronomical observatory. 1930. V. 3. P. 54-57.

Taylor D. B. (1998) Ephemerides of the five major Uranian satellites by numerical integration *Astronomy and Astrophysics*. 1998. V. 247. P. 362-374.

Tomita K., Soma M. Astrometric observations of satellites of Uranus. Tokyo Astronomical Observatory. *Tokyo Astronomical Bulletin*. 1979. 2nd ser. No. 261. P. 2977-2981.

USNO. *Astronomical and Meteorological Observations made during the year 1875 at the United States Naval Observatory. Observations made with the XXVI-inch equatorial, 1875. Results of observations of the satellites of Uranus in 1875.* Washington: Government printing office. 1878. P. 362-363.

USNO. *Astronomical and Meteorological Observations made during the year 1876 at the United States Naval Observatory. Observations made with the XXVI-inch equatorial, 1876. Results of observations of the satellites of Uranus.* Washington: Government printing office. 1880. P. 388-389.

USNO. *Astronomical and Meteorological Observations made during the year 1876 at the United States Naval Observatory. Observations made with the XXVI-inch equatorial, 1878. Results of observations of the satellites of Uranus.* Washington: Government printing office. 1882. P. 91-91.

USNO. *Astronomical and Meteorological Observations made during the year 1879 at the United States Naval Observatory. Results of observations made with the XXVI-inch equatorial. Results of observations of the satellites of Uranus.* Washington: Government printing office. 1883. P. 125-125.

USNO. *Astronomical and Meteorological Observations made during the year 1880 at the United States Naval Observatory. Results of observations made with the XXVI-*

inch equatorial. Results of observations of the satellites of Uranus. Washington: Government printing office. 1884. P. 105.

USNO. Astronomical and Meteorological Observations made during the year 1881 at the United States Naval Observatory. Results of observations made with the XXVI-inch equatorial. Results of observations of the satellites of Uranus. Washington: Government printing office. 1885a. P. 109-110.

USNO. Astronomical and Meteorological Observations made during the year 1882 at the United States Naval Observatory. Results of observations with the XXVI-inch equatorial. Results of observations of the satellites of Uranus. Washington: Government printing office. 1885b. P. 107-108.

USNO. Astronomical and Meteorological Observations made during the year 1883 at the United States Naval Observatory. Results of observations with the XXVI-inch equatorial. Results of observations of the satellites of Uranus. Washington: Government printing office. 1887. P. 135-136.

USNO. Astronomical and Meteorological Observations made during the year 1884 at the United States Naval Observatory. Results of observations with the XXVI-inch Equatorial. Results of observations of the satellites of Uranus. Washington: Government printing office. 1889. P. 203-204.

USNO. Astronomical and Meteorological Observations made during the year 1892 at the United States Naval Observatory. Results of observations with the 26-inch telescope. Satellites of Uranus. Washington: Government printing office. 1899. P. 203-204.

USNO, Flagstaff. Planetary Ephemeris Data "CCD Astrometry of the Outer Planets and Satellites."

<http://ssd.jpl.nasa.gov/iau-comm4/plan-eph-data/ccd.nofs.html>

USNO, Flagstaff. Planetary Ephemeris Data.

http://www.nofs.navy.mil/data/FASTT/collegc_2006.ssf

http://www.nofs.navy.mil/data/FASTT/collegc_2007.ssf

van Biesbroeck G. Measures of the satellites of Uranus and Mars. Communications of Lunar and Planetary Laboratory. 1970. V. 8. P. 179-188.

van Biesbroeck G., Vesely C.D., Aksnes K., Marsden B.G. Observations of comets, minor planets, Pluto, and satellites. Astronomical Journal. 1976. V. 81. P. 122-124.

Varfolomeev M. An attempt to build a new completely analytical theory of the Uranian satellites: The results achieved and the results to be obtained. Planet. and Space Sci. 2008. V. 56. P. 1773-1777.

Veiga C. H., Vieira Martins R., Lazzaro D., Veillet C. Position observations of the five greatest Uranian satellites and comparison with theory. Astronomy and Astrophysics Supplement Series. 1987. V. 70. No. 3. P. 325-334.

Veiga C. H., Vieira Martins R. Positions of Uranian satellites. Astronomy and Astrophysics Supplement. 1994. V. 107, P. 559-561.

Veiga C. H., Vieira Martins R. A method to define a reference system for the reduction of astrometric positions of natural satellites. Astronomy and Astrophysics Supplement. 1994. V. 107, P. 551-558.

Veiga C. H., Vieira Martins R. CCD astrometric observations of Uranian satellites. Astronomy and Astrophysics Supplement. 1995. V. 113. P. 557-560.

Veiga C. H., Vieira Martins R. (1999) CCD astrometric observations of Uranian satellites: 1995-1998. Astronomy and Astrophysics Supplement. 1999. V. 138. P. 247-251.

Veiga C. H., Vieira Martins R., Andrei Alexandre H. Positions of Uranus and Its Main Satellites. The Astronomical Journal. 2003. V. 125. No. 5. P. 2714-2720.

- Veiga C. H., Bourget P. Puck satellite Earth-based observations. *Astronomy and Astrophysics*. 2006. V. 454. P. 683-685.
- Veillet C., Ratier G. Astrometric study of the Uranus satellite Miranda. *Astronomy and Astrophysics*. 1980. V. 89. No. 3. P. 342-344.
- Veillet C. 1980-81 observations of Miranda - New orbit and mass of Ariel and Umbriel. *Astronomy and Astrophysics*. 1983a. V. 118. No. 2. P. 211-216.
- Veillet C. De l'observation et du mouvement des satellites d'Uranus. SERGA. These de Doctorat d'Etat - Universite de Paris 6. 1983b.
- Walker R. L., Christy J. W., Harrington R. S. Positions of planets and natural satellites. *Astronomical Journal*. 1978. V. 83. No. 7. P. 838-844.
- Walker R. L., Harrington R. S. Positions of planets and natural satellites. III. *Astronomical Journal*. 1988. V. 95. P. 1562-1566.
- Winlock J., Pickering E. C. Micrometric measurements. Chapter IV. Satellites of Saturn, Uranus, and Neptune. *Annals of Harvard College Observatory*. 1888. V. 13. P. 86-91.
- Whitaker E., Greenberg R. Eccentricity and inclination of Miranda's orbit. *Communications of the Lunar and Planetary Laboratory*. 1973. No. 194. P. 70-80.
- Yizhakevich O., Kulyk I., Major S., Shatokhina S. Catalogue of astrometric positions of the satellites of Saturn, Uranus, and Neptune at 1990 opposition. 1990.
[http : //www.mao.kiev.ua/ast/sat1/90_txt.htm](http://www.mao.kiev.ua/ast/sat1/90_txt.htm).

Приложение

В разделе "Уравнения движения и возмущающая функция" мы ввели функции $D(a, a', h, h', k, k', p, p', q, q')$. Было показано, что эти функции бывают двух типов: $D^{(2)}$ и $D^{(4)}$. Явный вид для функции $D^{(2)}$ представлен в разделе "Уравнения движения и возмущающая функция." Функцию $D^{(4)}$ мы представили в следующем виде:

$$D = \sum B f_L h^{N_1}, h'^{N_2}, k^{N_3}, k'^{N_4}, p^{N_5}, p'^{N_6}, q^{N_7}, q'^{N_8}$$

или

$$D = \sum_i D_i(B f_L h^{N_1}, h'^{N_2}, k^{N_3}, k'^{N_4}, p^{N_5}, p'^{N_6}, q^{N_7}, q'^{N_8}) = \sum_i D_i,$$

где D_i вычисляются по следующей формуле:

$$D_i = B f_L h^{N_1} h'^{N_2} k^{N_3} k'^{N_4} p^{N_5} p'^{N_6} q^{N_7} q'^{N_8},$$

Элементы Лагранжа возмущающего спутника помечены штрихом. В Табл. 13 представлен полный список функций D_i . Каждая строка этой таблицы описывает определенную функцию D_i . Например, в строке под номером 10 содержится функция

$$D_{10} = f_6 h^0 h'^0 k^0 k'^4 p^0 p'^0 q^0 q'^0 = f_6 k'^4,$$

а в строке под номером 108 содержится функция

$$D_{108} = -f_{23} h^0 h'^1 k^1 k'^0 p^0 p'^1 q^1 q'^0 = -f_{23} h' k p' q.$$

Таблица 13: Функции D_i

i	B	f_L	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8
1	1	4	4	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 13: Функции D_i

i	B	f_L	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8
2	2	4	2	0	2	0	0	0	0	0
3	1	4	0	0	4	0	0	0	0	0
4	1	5	2	2	0	0	0	0	0	0
5	1	5	2	0	0	2	0	0	0	0
6	1	5	0	2	2	0	0	0	0	0
7	1	5	0	0	2	2	0	0	0	0
8	1	6	0	4	0	0	0	0	0	0
9	2	6	0	2	0	2	0	0	0	0
10	1	6	0	0	0	4	0	0	0	0
11	1	11	2	0	1	1	0	0	0	0
12	1	11	3	1	0	0	0	0	0	0
13	1	11	0	0	3	1	0	0	0	0
14	1	11	1	1	2	0	0	0	0	0
15	1	12	0	2	1	1	0	0	0	0
16	1	12	1	3	0	0	0	0	0	0
17	1	12	0	0	1	3	0	0	0	0
18	1	12	1	1	0	2	0	0	0	0
19	1	17	0	0	2	2	0	0	0	0
20	4	17	1	1	1	1	0	0	0	0
21	-1	17	0	2	2	0	0	0	0	0
22	-1	17	2	0	0	2	0	0	0	0
23	1	17	2	2	0	0	0	0	0	0
24	1	7	2	0	0	0	2	0	0	0
25	1	7	2	0	0	0	0	0	2	0
26	1	7	0	0	2	0	2	0	0	0
27	1	7	0	0	2	0	0	0	2	0

Таблица 13: Функции D_i

i	B	f_L	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8
28	1	7	0	2	0	0	2	0	0	0
29	1	7	0	2	0	0	0	0	2	0
30	1	7	0	0	0	2	2	0	0	0
31	1	7	0	0	0	2	0	0	2	0
32	1	7	2	0	0	0	0	2	0	0
33	1	7	2	0	0	0	0	0	0	2
34	1	7	0	0	2	0	0	2	0	0
35	1	7	0	0	2	0	0	0	0	2
36	1	7	0	2	0	0	0	2	0	0
37	1	7	0	2	0	0	0	0	0	2
38	1	7	0	0	0	2	0	2	0	0
39	1	7	0	0	0	2	0	0	0	2
40	1	8	0	0	0	0	4	0	0	0
41	1	8	0	0	0	0	0	4	0	0
42	1	8	0	0	0	0	0	0	4	0
43	1	8	0	0	0	0	0	0	0	4
44	2	8	0	0	0	0	2	0	2	0
45	2	8	0	0	0	0	0	2	0	2
46	1	9	0	0	0	0	2	2	0	0
47	1	9	0	0	0	0	2	0	0	2
48	1	9	0	0	0	0	0	2	2	0
49	1	9	0	0	0	0	0	0	2	2
50	1	13	1	1	0	0	2	0	0	0
51	1	13	1	1	0	0	0	0	2	0
52	1	13	1	1	0	0	0	2	0	0
53	1	13	1	1	0	0	0	0	0	2

Таблица 13: Функции D_i

i	B	f_L	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8
54	1	13	0	0	1	1	2	0	0	0
55	1	13	0	0	1	1	0	0	2	0
56	1	13	0	0	1	1	0	2	0	0
57	1	13	0	0	1	1	0	0	0	2
58	1	15	2	0	0	0	1	1	0	0
59	1	15	0	2	0	0	1	1	0	0
60	1	15	0	0	2	0	1	1	0	0
61	1	15	0	0	0	2	1	1	0	0
62	1	15	2	0	0	0	0	0	1	1
63	1	15	0	2	0	0	0	0	1	1
64	1	15	0	0	2	0	0	0	1	1
65	1	15	0	0	0	2	0	0	1	1
66	1	16	0	0	0	0	3	1	0	0
67	1	16	0	0	0	0	1	3	0	0
68	1	16	0	0	0	0	1	1	2	0
69	1	16	0	0	0	0	1	1	0	2
70	1	16	0	0	0	0	2	0	1	1
71	1	16	0	0	0	0	0	2	1	1
72	1	16	0	0	0	0	0	0	3	1
73	1	16	0	0	0	0	0	0	1	3
74	1	18	0	0	2	0	0	0	2	0
75	4	18	1	0	1	0	1	0	1	0
76	-1	18	2	0	0	0	0	0	2	0
77	-1	18	0	0	2	0	2	0	0	0
78	1	18	2	0	0	0	2	0	0	0
79	1	19	0	0	1	1	0	0	2	0

Таблица 13: Функции D_i

i	B	f_L	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8
80	-1	19	1	1	0	0	0	0	2	0
81	2	19	0	1	1	0	1	0	1	0
82	2	19	1	0	0	1	1	0	1	0
83	-1	19	0	0	1	1	2	0	0	0
84	1	19	1	1	0	0	2	0	0	0
85	1	20	0	0	0	2	0	0	2	0
86	4	20	0	1	0	1	1	0	1	0
87	-1	20	0	2	0	0	0	0	2	0
88	-1	20	0	0	0	2	2	0	0	0
89	1	20	0	2	0	0	2	0	0	0
90	1	21	0	0	2	0	0	0	1	1
91	-1	21	0	0	2	0	1	1	0	0
92	2	21	1	0	1	0	0	1	1	0
93	2	21	1	0	1	0	1	0	0	1
94	-1	21	2	0	0	0	0	0	1	1
95	1	21	2	0	0	0	1	1	0	0
96	1	22	0	0	1	1	0	0	1	1
97	1	22	0	0	1	1	1	1	0	0
98	1	22	1	1	0	0	0	0	1	1
99	1	22	1	1	0	0	1	1	0	0
100	1	22	0	1	1	0	0	1	1	0
101	-1	22	0	1	1	0	1	0	0	1
102	-1	22	1	0	0	1	0	1	1	0
103	1	22	1	0	0	1	1	0	0	1
104	1	23	0	0	1	1	0	0	1	1
105	1	23	0	0	1	1	1	1	0	0

Таблица 13: Функции D_i

i	B	f_L	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8
106	1	23	1	1	0	0	0	0	1	1
107	1	23	1	1	0	0	1	1	0	0
108	-1	23	0	1	1	0	0	1	1	0
109	1	23	0	1	1	0	1	0	0	1
110	1	23	1	0	0	1	0	1	1	0
111	-1	23	1	0	0	1	1	0	0	1
112	1	24	0	0	1	1	0	0	1	1
113	-1	24	0	0	1	1	1	1	0	0
114	-1	24	1	1	0	0	0	0	1	1
115	1	24	1	1	0	0	1	1	0	0
116	1	24	0	1	1	0	0	1	1	0
117	1	24	0	1	1	0	1	0	0	1
118	1	24	1	0	0	1	0	1	1	0
119	1	24	1	0	0	1	1	0	0	1
120	1	25	0	0	0	2	0	0	1	1
121	-1	25	0	0	0	2	1	1	0	0
122	2	25	0	1	0	1	0	1	1	0
123	2	25	0	1	0	1	1	0	0	1
124	-1	25	0	2	0	0	0	0	1	1
125	1	25	0	2	0	0	1	1	0	0
126	1	18	0	0	2	0	0	0	0	2
127	4	18	1	0	1	0	0	1	0	1
128	-1	18	2	0	0	0	0	0	0	2
129	-1	18	0	0	2	0	0	2	0	0
130	1	18	2	0	0	0	0	2	0	0
131	1	19	0	0	1	1	0	0	0	2

Таблица 13: Функции D_i

i	B	f_L	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8
132	-1	19	1	1	0	0	0	0	0	2
133	2	19	0	1	1	0	0	1	0	1
134	2	19	1	0	0	1	0	1	0	1
135	-1	19	0	0	1	1	0	2	0	0
136	1	19	1	1	0	0	0	2	0	0
137	1	20	0	0	0	2	0	0	0	2
138	4	20	0	1	0	1	0	1	0	1
139	-1	20	0	2	0	0	0	0	0	2
140	-1	20	0	0	0	2	0	2	0	0
141	1	20	0	2	0	0	0	2	0	0
142	1	26	0	0	0	0	0	0	2	2
143	4	26	0	0	0	0	1	1	1	1
144	-1	26	0	0	0	0	0	2	2	0
145	-1	26	0	0	0	0	2	0	0	2
146	1	26	0	0	0	0	2	2	0	0