О ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКОВ САТУРНА, РАЗРАБОТАННОЙ Г.Н.ДУБОШИНЫМ

Емельянов Н.В.

Труды ГАИШ. Т. 15. 1945. С. 158-311 (154 страницы).
Труды ГАИШ. Т. 28. 1960. С. 121-170 (50 страниц).

ОБЪЕКТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Спутники Сатурна

Элементы орбит

Спутник	Б. полуось км	Эксцен-три-ситет	Наклон к экв., град	Масса в долях м. планеты
Мимас	185540	0.0190	1.56	0.73×10^{-7}
Энцелад	238200	0.0049	0.03	0.25×10^{-6}
Тефия	294990	0.0000	1.10	0.11×10^{-5}
Диона	377650	0.0022	0.01	0.19×10^{-5}
Рея	527370	0.0003	0.35	0.40×10^{-5}
Титан	1221800	0.0291	0.30	0.21×10^{-3}
Гиперион	1481100	0.1035	0.64	0.20×10^{-6}
Япет	3561850	0.0283	18.50	0.26×10^{-5}
Феба	12893240	0.1756	173.73*	0.0

Экваториальный радиус Сатурна 60268 км.

СИСТЕМА КООРДИНАТ

Сатурноцентрическая, невращающаяся, цилиндрическая:

$$\rho, \ v, \ z$$

$$x = \rho \cos v, \quad y = \rho \sin v, \quad z$$

Плоскость x, y совпадает с плоскостью экватора Сатурна.
Ось x $\rightarrow$ в восходящий узел экватора Сатурна на геоэкваторе.

МОДЕЛЬ ДЕЙСТВУЮЩИХ СИЛ

1. **Притяжение Сатурна.** Сатурн - однородный эллипсоид вращения.
   Заданы экваториальный r_0, полярный c_0 радиусы и масса Сатурна.
   Малый параметр в возмущениях от несферичности Сатурна:

$$\varepsilon_0 = \frac{r_0^2 - c_0^2}{r_0^2} \; \frac{r_0^2}{a^2} \, ,$$

где a - большая полуось орбиты спутника.

   Для Мимаса (максимальное) $\varepsilon_0 = 0.002$

2. **Притяжение кольца Сатурна.**
   Кольцо однородное нулевой толщины.
   Заданы внутренний, внешний радиусы и масса кольца.
   Малый параметр в возмущениях от притяжения кольца:

   масса кольца $= 0.37 \times 10^{-4}$

3. **Взаимное притяжение спутников.**

   Малые параметры – массы спутников в долях массы Сатурна.

   Масса Титана: 0.0002

4. **Притяжение Солнца.**

   Малый параметр:

$$\varepsilon_s = \frac{m_s}{m_0} \; \frac{a^3}{R_s^3} \, ,$$

где m_s - масса Солнца, m_0 - масса Сатурна, a - большая полуось орбиты спутника, R_s - большая полуось орбиты Сатурна.

   Для Фебы (максимальное) $\varepsilon_s = 0.0025$
   Для Титана $\varepsilon_s = 2 \times 10^{-6}$

Публикации 1945 года:
Поиск периодических решений.

Первое приближение: $\rightarrow$ Ограничения на модель действующих сил:

1. Притяжение однородного эллипсоида вращения - Сатурна.

2. Притяжение однородного плоского кругового кольца Сатурна.

3. Притяжение однородных одномерных круговых колец, лежащих в плоскости экватора Сатурна (спутники 1 - 7).

4. Притяжение спутников 8 и 9, двигающихся по заданным кеплеровским сатурноцентрической орбитам. Возмущающая функция осреднена по долготе возмущающего спутника и по доготе возмущаемого спутника.

5. Притяжение Солнца, двигающегося по заданной кеплеровской сатурноцентрической орбите. Возмущающая функция осреднена по долготе Солнца и по доготе возмущаемого спутника.

Все это для того, чтобы:
— силовая функция зависела только от ρ и z и
— являлась четной функцией от z.

Для практических вычислений предлагается использовать разложение силовой функции по степеням z. Даются формулы в общем виде для членов любой степени.

Замена переменных:

$$\rho = a + x, \quad z, \quad v \ ,$$

где a - заданная постоянная.

Рассматриваются дифференциальные уравнения для x, z . После их решения функция v находится квадратурой.

Уравнения имеют частное решение: $x = 0$, $z = 0$.

Методом Ляпунова производится поиск периодических решений, близких к решению $x = 0$, $z = 0$.

При этом **не** используются разложения по степеням малого параметра, характеризующего возмущающий фактор.

Решение находится в виде рядов по степеням отклонений решения от решения $x = 0$, $z = 0$. Фактически решение находится в виде рядов по степеням наклонов и эксцентриситетов орбит спутников.

Два варианта решения.

П е р в ы й   в а р и а н т.

Плоские периодические решения $z = 0$.

В начальный момент t_0 полагаем: $\dot{x}_0 = 0$, $x_0 = \sigma$ (x_0 - произвольная постоянная).

Решение для x находится в виде рядов по положительным степеням σ.

Коэффициенты рядов - периодические функции времени, представленные в явном виде конечными отрезками тригонометрических рядов по кратным основного периода.

Явно выписаны члены до 4-й степени малого параметра. Описан алгоритм для получения членов любого порядка.

Период изменения x (а значит и ρ) в общем случае не совпадает с периодом изменения v. Однако периоды изменения x и v близки.

Получаются **периплегматические** (условно-периодические) движения (стр. 204) $\rightarrow$ Плоская незамкнутая траектория движения, плотно заполняющая плоское кольцо.

В т о р о й   в а р и а н т.

Пространственные периодические решения.

В начальный момент t_0 полагаем: $\dot{z}_0 = 0$, $z_0 = \sigma$.

Решения для x и z находятся в виде рядов по положительным степеням σ.

Коэффициенты рядов - периодические функции времени с одним и тем же периодом для x и z.

Они представлены в явном виде конечными отрезками тригонометрических рядов по кратным основного периода.

Явно выписаны члены до 4-й степени малого параметра. Описан алгоритм для получения членов любого порядка.

Начальное значение для функции x **не** может быть взято произвольно. Оно зависит от начального значения z и определяется формулой (102) (Стр. 202), причем

$$x_0 \sim \sigma^2.$$

Период изменения x и z (а значит и ρ) в общем случае не совпадает с периодом изменения v.

Получаются *периплегматические* (условно-периодические) пространственные движения.

Незамкнутая траектория движения, плотно заполняющая некоторую поверхность вокруг начала координат.

"Удовлетворительность или неудовлетворительность полученного движения выяснится, конечно, путем сравнения построенной теории с наблюдениями".

Далее производится поиск
любых решений, близких к решению $x = 0$, $z = 0$
при произвольных начальных условиях.

Дается алгоритм построения решения в виде рядов по целым положительным степеням начальных условий

$$x_0, \;\; z_0, \;\; \dot{x}_0, \;\; \dot{z}_0,$$

которые считаются величинами первого порядка малости.

Члены первого и второго порядков содержат время только под знаком тригонометрических функций. Решение для x и z представлено тригонометрическими рядами с двумя частотами n и m.

В статье не показано, какое решение получается для v. Однако очевидно, что частота изменения v не будет являться комбинацией частот n и m. То есть мы будем иметь "трехчастотное"пространственное решение с произвольными начальными условиями.

Члены третьего и последующих порядков содержат время вне знаков тригонометрических функций – **смешанные члены** .

Члены четвертого порядка в x уже содержат вековой член (Стр. 265). Т. е. имеем **вековой член в большой полуоси** орбиты с коэффициентом 4-й степени относительно эксцентриситетов и наклонов орбит.

Факт наличия вековых и смешанных членов высоких порядков не затрудняет применения теории на ограниченных интервалах времени.

В силу доказанной устойчивости решения и сходимости рядов для любого заданного интервала времени можно достичь требуемой точности, если взять достаточное число членов в рядах по степеням начальных условий.

Публикации 1960 года.

Модель действующих сил.

1. Притяжение однородного эллипсоида вращения - Сатурна.
2. Притяжение однородного плоского кругового кольца Сатурна.
3. Притяжение других спутников (без упрощений).
4. Притяжение Солнца, двигающегося по заданной кеплеровской сатурноцентрической орбите.

Промежуточное движение - учитываются только притяжение Сатурна и кольца.

Строятся уравнения для возмущений **первого порядка** относительно возмущающих масс (других спутников) и Солнца.

В правых частях уравнений вместо координат возмущаемых и возмущающих спутников подставляются координаты *исходного движения*, за которое принимаются движения в плоскости экватора по круговым кеплеровским орбитам (для спутников 1 - 7).

В возмущениях движения первых семи спутников пренебрегается притяжением Фебы.

В возмущениях движения Япета и Фебы пренебрегается притяжением первых семи спутников.

Уравнения получаются линейные неоднородные с постоянными коэффициентами. Они имеют вид

$$\frac{d^2(\delta\rho)}{dt^2} + m^2\delta\rho = R(t) \ ,$$

$$\frac{d^2(\delta z)}{dt^2} + n^2\delta z = Z(t) \ .$$

Значения m и n близки к значению среднего движения спутника в кеплеровском движении вокруг точечной планеты.

Отличие m от n обусловлено наличием сжатия Сатурна и притяжения колец.

Во взаимных возмущениях первых семи спутников $\delta z = 0$.

Решение находится в виде бесконечных рядов. Решение содержит один тригонометрический член с частотой m для $\delta\rho$ и δv , а также бесконечные тригонометрические ряды по кратным разности долгот возмущаемого и возмущающего спутников. Коэффициенты рядов составляются из комбинаций коэффициентов Лапласа.

Дается общий вид формул для всех коэффициентов.

Фактически малым параметром в рядах является отношение больших полуосей орбит возмущаемого и возмущающего спутников. Численные значения этих отношений на самом деле не малы. Однако коэффициенты выражаются через коэффициенты Лапласа в о бщем виде.

Возмущения от Солнца содержат тригонометрические ряды по кратным частотам обращения спутника и Солнца и комбинациям этих частот. Используется разложение в ряд по степеням эксцентриситета орбиты Солнца.

При определении возмущений от Солнца в координатах спутников Япет и Феба в исходном движении пренебрегается сжатием планеты и притяжением кольца. Тогда получается $n = m$. В итоге в возмущениях δz возникают **смешанные члены** типа $t \sin t$.

Для первых семи спутников
"можно сказать, что влияние сжатия планеты как бы перевешивает влияние Солнца и не позволяет спутнику удаляться от экваториальной плоскости планеты. Для Япета и Фебы, наоборот, влияние сжатия планеты настолько мало, что им можно пренебречь, а тогда в выражении для δz сейчас же появляются смешанные вековые члены, приводящие к постепенному уменьшению или увеличению первоначального наклона оскулирующей орбиты."

В 50-е годы А.И.Рыбаковым по формулам теории Г.Н.Дубошина были вычислены коэффициенты рядов, представляющие движение спутников. За исходные данные были взяты параметры средних орбит, найденные из наблюдений.

Е.П.Аксенов:
"И все же эти труды не завершились успехом. Теория плохо представляла наблюдения".

Причины две.
1. Нужно уточнять из наблюдений непосредственно параметры применяемой теории.
2. Наличие смешанных членов.

Е.П.Аксенов:
"Устранить этот недостаток совсем нетрудно, если, например воспользоваться методом, подобным методу Хилла в теории движения Луны.